



استاد منتظری

مدیریت موسسه

MAG Harfeakhar .org
وبسایت رسمی موسسه حرف آخر

موسسه حرف آخر در سال ۱۳۹۰ با هدف ارائه جدیدترین تکنولوژی آموزش (پویا نمایی) کار خود را در زمینه آموزش دروس کنکور آغاز کرد.

آموزش فول انیمیشنی

تفاوت همینجاست

تدریس با استفاده از الگو به جای صدها تکنیک



01 جدیدترین جزوات و کتاب کارهای برترین اساتید کشور در مجله حرف آخر

02 هر هفته انگیزشی ترین مقالات مشاوره ای در رادیو حرف آخر

03 جدید ترین فیلم های آموزشی در فیلم خانه حرف آخر

فصل ۸

دنباله ی حسابی و هندسی

جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی

۱

۱

بچه ها! به اعداد $۱, ۳, ۵, ۷, \dots$ دقت کنید. فکر می کنید بین هر دو جمله ی متوالی چه رابطه ای وجود دارد؟



آقا اجازه! اگر به هر جمله ۲ واحد اضافه کنیم، جمله ی بعدی درست می شه.

درست گفتی عزیزم.



بچه ها! به دسته ای از اعداد، مثل اعداد بالا که از یک عدد شروع شده و با افزایش یک مقدار ثابت به هر جمله، جمله ی بعدی تشکیل میشه، دنباله ی حسابی می گیم. (مقدار ثابت، ممکنه مثبت یا منفی یا صفر باشه که بهش قدر نسبت گفته میشه). در مثال بالا، عدد ۲، قدر نسبته.

بچه ها به سوال! اگه جمله ی ۱۵۱ ام این دنباله رو بخوان چیکار کنیم؟

آقا اجازه! قبل از این که به سوال شما جواب بدم، اگه موافق باشین قانونی رو درست کنیم تا بتونیم با استفاده از اون هر جمله ای رو که از ما خواستن به دست بیاریم.



$$\begin{array}{ccccccc} & +d & +d & +d & +d & \cdots & +d \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & \cdots \end{array}$$

آقا به نظرم می شه یک دنباله ی حسابی رو در حالت کلی این طوری نوشت:

حالا اگه بتونیم برای a_n یک رابطه درست کنیم همه پی هله!

$$\begin{array}{l} \text{اگه } a_1 \text{ رو با } d \text{ جمع کنیم، به وجود می آد.} \\ \text{اگه } a_1 \text{ رو با } 2d \text{ جمع کنیم، به وجود می آد.} \\ \text{اگه } a_1 \text{ رو با } 3d \text{ جمع کنیم، به وجود می آد.} \\ \vdots \\ \text{اگه } a_1 \text{ رو با } (n-1)d \text{ جمع کنیم، به وجود می آد. یعنی:} \end{array}$$

$$+ \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & a_1 \\ a_2 & = & a_1 + d \\ a_3 & = & a_1 + 2d \\ a_4 & = & a_1 + 3d \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & = & a_1 + (n-1)d \end{array}$$

آخ جون پیدا شد!!! با این حساب می شه گفت:



آقا حالا می تونیم به سوال شما جواب بدم. در واقع دنباله ی $۱, ۳, ۵, ۷, \dots$ رو می شه این طوری به دست آورد:



$$a_{151} = a_1 + 150d = 1 + 150(2) = 301$$

آفرین به تو دانش آموز کنجکاوم.



مثال در یک دنباله ی حسابی جمله ی پنجم، برابر ۱۳ و جمله ی چهاردهم، برابر ۴۰ می باشد. جمله ی صد و یکم این دنباله را به دست آورید.

$$\begin{array}{lcl} a_{14} = 40 & \Rightarrow & a_1 + 13d = 40 \\ a_5 = 13 & \Rightarrow & a_1 + 4d = 13 \\ \hline & \ominus & 9d = 27 \\ & \Rightarrow & d = 3 \end{array}$$

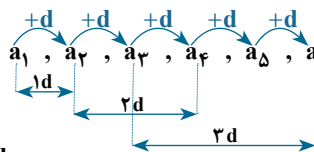
$$a_1 + 4d = 13 \Rightarrow a_1 + 12 = 13 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_{101} = a_1 + 100d = 1 + 100(3) = 301$$

۲

یافتن قدر نسبت یک دنباله ی حسابی با معلوم بودن دو جمله ای دلخواه

۲



بچه ها! به دنباله ی حسابی روبه رو نگاه کنید: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = d \\ a_4 - a_2 = 2d \\ a_6 - a_3 = 3d \end{cases}$$



با توجه به دنباله ی بالا، آیا با این روابط موافقت می کنید؟

آقا اجازه؟ روابطی که نوشتید صمیمه و آله اشتباه نلنم می فوایر بگیرد که در حالت کلی می شه نوشت: $a_m - a_n = (m - n)d$



آفرین عزیزم، چقدر خوب ذهن منو می خونی!



با توجه به رابطه ای که گفتی میتونم بنویسم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

تفاضل دوجمله
تفاضل اندیس های اون دوجمله

یعنی قدر نسبت یک دنباله ی حسابی برابر با:

$$d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{25 - 9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

مثال در یک دنباله ی حسابی $a_3 = 9$ و $a_7 = 25$ می باشد. قدر نسبت این دنباله چیست؟

مثال

۳

واسطه حسابی (عددی)

۳

بچه ها به دنباله ی روبرو خوب نگاه کنید: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$



همون طور که می بیند، عدد ۷ میانگین اعداد (۵، ۹)، (۳، ۱۱)، (۱، ۱۳) هست.

از صحبت های بالا می شه فهمید که در یک دنباله ی حسابی، هر جمله واسطه ی حسابی دو جمله ی کناری خودشه.

$$a_{n-k}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k}$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$2a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$$

⋮

$$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$$

⇒ a_n واسطه ی حسابی دو جمله ی a_{n-k} و a_{n+k} هست.

مثال اگر $2p+1, p-2, 3p-2$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، قدر نسبت دنباله چیست؟

مثال

در این سوال جمله ی وسط (یعنی $p-2$) واسطه ی حسابی جملات کناری شه. در نتیجه:



$$2(p-2) = 2p+1 + 3p-2 \Rightarrow 2p-4 = 5p-1 \Rightarrow 3p = -3 \Rightarrow \boxed{p = -1}$$

آقا (-۱) جواب این سواله.



تعجب می کنم با این همه حضور ذهن. چرا جواب این سوال رو غلط دادی! علتش هم اینه که سوال رو خوب نخوندی!



در این سوال خواسته ی مسئله، p نیست بلکه d یا همون قدر نسبتته. پس:

$$2p+1, p-2, 3p-2 \xrightarrow{p=-1} -1, -3, -5 \Rightarrow \boxed{d = -2}$$

۴

درج تعدادی واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

۴

بچه‌ها یه سوال! آیا می‌تونید بین اعداد ۲۰ و ۲ به تعداد ۵ واسطه‌ی حسابی درج کنید؟ منظورم اینه که:

$$۲, (?), (?), (?), (?), (?), ۲۰$$

آقا اجازه؟ با توجه به این که ۲ جمله داشتیم و ۵ جمله هم بین اون‌ها قرار داریم، پس جمعاً ۷ جمله داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} +d & & & & & & \\ \swarrow & & & & & & \\ ۲, & (?), & (?), & (?), & (?), & (?), & ۲۰ \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & a_7 \end{array}$$

با معلوم بودن $a_1 = ۲$ و $a_7 = ۲۰$ می‌شه قدر نسبت این دنباله رو پیدا کرد در نتیجه، جملات مجهول این دنباله پیدا می‌شه.

$$d = \frac{a_7 - a_1}{7 - 1} = \frac{20 - 2}{7 - 1} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow ۲, (۵), (۸), (۱۱), (۱۴), (۱۷), ۲۰$$

آفرین به شما دانش‌آموزان خوبم.

بچه‌ها! در حالت کلی اگه بخواید بین دو عدد a, b به تعداد m واسطه‌ی حسابی درج کنید، کافیه قدر نسبت رو از رابطه‌ی زیر

به‌دست بیارید:

$$\begin{array}{c} a, \dots, b \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \\ a_1 \quad \quad a_{m+2} \end{array} \Rightarrow d = \frac{a_{m+2} - a_1}{(m+2) - (1)} \Rightarrow \boxed{d = \frac{b - a}{m + 1}}$$

مثال بین دو عدد ۹۳ و -۵ به تعداد سیزده واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. سومین واسطه کدام است؟

$$\begin{array}{ccccccc} -۵, & \circ, & \circ, & (?), & \dots, & \circ, & ۹۳ \\ \downarrow & & & \uparrow & & & \downarrow \\ a_1 & & & \text{سومین واسطه} & & & a_{15} \end{array} \Rightarrow d = \frac{a_{15} - a_1}{15 - 1} = \frac{93 - (-5)}{14} = \frac{98}{14} = 7 \Rightarrow -۵, (۲), (۹), (۱۶)$$

سومین واسطه

۵

رابطه‌ی بین جملات یک دنباله‌ی حسابی با اندیس‌هایش

۵

بچه‌ها فکر می‌کنید در یک دنباله‌ی حسابی، چه زمانی $a_m - a_n = a_k - a_l$ می‌شه؟

آقا اجازه؟ فکر کنم جواب سوال تون رو پیدا کردم!

$$\xrightarrow{\text{می‌دونیم}} \begin{cases} a_m - a_n = (m - n)d \\ a_k - a_l = (k - l)d \end{cases} \xrightarrow{\text{اگه } (m - n = k - l) \text{ باشه}} a_m - a_n = a_k - a_l$$

آفرین عزیزم. پس می‌تونم بگم: $a_7 - a_2 = a_{10} - a_5$ چونکه: $7 - 2 = 10 - 5$

حالا یه سوال دیگه: فکر می‌کنید در یک دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی $a_m + a_n = a_k + a_l$ در چه صورت برقراره؟

آقا اجازه؟ معلومه.

$$\xrightarrow{\text{میدونیم}} \begin{cases} a_m + a_n = a_1 + (m - 1)d + a_1 + (n - 1)d = 2a_1 + (m + n - 2)d \\ a_k + a_l = a_1 + (k - 1)d + a_1 + (l - 1)d = 2a_1 + (k + l - 2)d \end{cases} \xrightarrow{\text{اگه } m + n = k + l \text{ باشه}} a_m + a_n = a_k + a_l$$

در یک دنباله‌ی حسابی

$$\begin{aligned} m - n = k - l &\Rightarrow a_m - a_n = a_k - a_l \\ m + n = k + l &\Rightarrow a_m + a_n = a_k + a_l \end{aligned}$$

نتیجه

بسیار عالی! چقدر زیبا نتیجه گرفتی. با این حساب می‌تونم بگم: $a_3 + a_5 = a_4 + a_4$ چونکه: $3 + 5 = 4 + 4$

۶

مجموع n جمله‌ای اول یک دنباله ی حسابی

۶

بچه‌ها! می‌شه حاصل $۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰$ رو به دست بیارید؟



آقا اجازه؟ آگه بفوایم این ۱۰۰ جمله رو دونه دونه با هم جمع کنیم، کلی طول می‌کشه!



کمی فکر کنید، شاید راهی پیدا کردید!



آقا اجازه؟ آگه جمله‌ی اول و آخر، دوم و یکنمونه به آخر و رو در کنار هم قرار بدیم، اون موقع :

$$\underbrace{1+2+3+...+98+99+100}_{\text{جمله } 100} = \underbrace{(1+100)+(2+99)+(3+98)+...}_{50 \text{ تا پرانتز}} = \underbrace{101+101+101+...}_{(101) \text{ تا } 50} = 50(101) = 5050$$

آفرین عزیزم.



حالا یه سوال دیگه: آیا تساوی روبرو رو قبول داریم؟ $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$



بله آقا، قبول داریم. علت درستی این تساوی اینه که مجموع اندیس‌های هر قسمت از این تساوی با هم برابرن. یعنی:

$$(1) + (n) = (2) + (n-1) = (3) + (n-2) \Rightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

بچه‌ها! حالا آگه موافق باشید، برای مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله ی حسابی رابطه‌ای رو ایجاد کنیم:



$$S_n = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n}_{\text{جمله } n}$$

$$S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + \left(\right) \xrightarrow{\text{میدونیم: } a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots} \frac{n}{2} \text{ تا پرانتز}$$

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\frac{n}{2} \text{ تا پرانتز}}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) \\ S_{75} &= \frac{75}{2}(a_1 + a_{75}) \end{aligned} \quad \text{مثال}$$

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \\ S_{75} &= \frac{75}{2}(2a_1 + 74d) \end{aligned} \quad \text{مثال}$$

مثال در یک دنباله ی حسابی، جمله‌ی اول برابر ۳ و جمله‌ی چهارم و پنجم برابر ۹۷ می‌باشد. مجموع چهل و پنج جمله‌ی اول کدام است؟

$$\text{داده‌ها: } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{45} = 97 \end{cases} \Rightarrow S_{45} = \frac{45}{2}(a_1 + a_{45}) = \frac{45}{2} \times (3 + 97) = 45 \times 50 = 2250$$

مثال در یک دنباله ی عددی $a_7 = 29$ و $a_3 = 5$ می‌باشد. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

$$\text{داده‌ها: } \begin{cases} a_3 = 5 \\ a_7 = 29 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_7 - a_3}{7 - 3} = \frac{29 - 5}{4} = 6 \Rightarrow d = 6$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفی}} a_3 = 5 \Rightarrow a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = -7$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \xrightarrow{(a_1 = -7), (d = 6)} S_{20} = 10(-14 + 114) \Rightarrow S_{20} = 1000$$

۷

درجه‌ی توابع a_n و S_n در یک دنباله‌ی حسابی

۷

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید در یک دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقراره. حالا این رابطه رو مرتب می‌کنم:



تابعی درجه‌ی یک با شیب d

$$a_n = a_1 + nd - d \Rightarrow a_n = d \cdot n + \boxed{a_1 - d} \Rightarrow a_n = d(n) + k$$

همون‌طور که می‌بینید، قدر نسبت دنباله، به جای ضریب n قرار گرفته.

مثال جمله‌ی عمومی دنباله‌های عددی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} 3, 7, 11, \dots &\Rightarrow a_n = 4n + K \xrightarrow{K=-1} \boxed{a_n = 4n - 1} \\ 9, 6, 3, \dots &\Rightarrow a_n = -3n + K \xrightarrow{K=12} \boxed{a_n = -3n + 12} \end{aligned}$$

اما بچه‌ها! با توجه به این که در دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ برقراره، آیا می‌تونید بگید S_n بعد از



استاندارد شدن به چه شکلی در می‌آد؟

آقا اجازه؟ بله می‌تونیم.

تابعی درجه‌ی دو بر حسب n

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d) = \frac{n}{2}(nd) + \frac{n}{2}(2a_1 - d) = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{d}{2}n^2 + Kn}$$

مثال در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = n^2 + 2n$ می‌باشد. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

روش تشریحی: $\begin{cases} S_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3 \\ S_2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5 \Rightarrow d = a_2 - a_1 \Rightarrow \boxed{d = 2}$

روش تستی: $S_n = n^2 + 2n \Rightarrow \boxed{d = 2}$

مثال در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{3n^2}{2} + n$ می‌باشد. جمله‌ی پنجاه و یکم این دنباله چیست؟

$$S_n = \frac{3}{2}n^2 + n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2} \\ \frac{d}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{51} = a_1 + 50 \cdot d = \frac{5}{2} + 150 \Rightarrow \boxed{a_{51} = 152 \frac{1}{2}}$$

۸

رابطه‌ی بین a_n و S_n در یک دنباله

۸

بچه‌ها! همون‌طور که می‌دونید در یک دنباله، « S_n یعنی مجموع n جمله‌ی اول اون دنباله» بنابراین:



$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} S_2 - S_1 = a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} S_3 - S_2 = a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \end{aligned} \Rightarrow \boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

مثال

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= a_1 \\ S_{53} - S_{52} &= a_{53} \end{aligned}$$

مثال یک دنباله‌ی حسابی $S_n = n^2 + 4n$ می‌باشد. جمله‌ی عمومی این دنباله (یعنی a_n) را به دست آورید.

روش اول: $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 4n) - ((n-1)^2 + 4(n-1)) = n^2 + 4n - (n^2 - 2n + 1 + 4n - 4) = 2n + 3$

روش دوم: $S_n = n^2 + 4n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 5 \Rightarrow a_1 = 5 \\ \frac{d}{2} = 1 \Rightarrow d = 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + (n-1)2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n + 3}$

مثال در یک دنباله ی حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می باشد. حاصل $a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$ کدام است؟

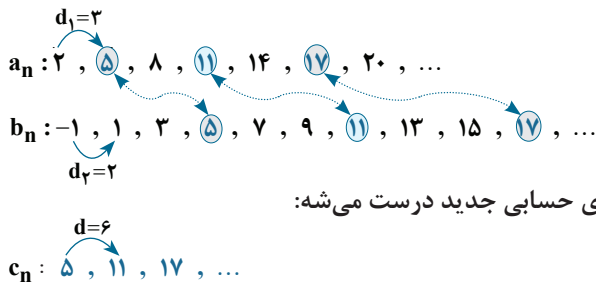
بچه ها! کافیه $a_1 + \dots + a_5$ رو به خواسته ی مسئله، اضافه و کم کنید تا S_1 ایجاد بشه:

$$a_1 + \dots + a_5 + a_6 + a_7 + \dots + a_{10} - (a_1 + \dots + a_5) = S_{10} - S_5 = [2(10)^2 - 3(10)] - [2(5)^2 - 3(5)] = 170 - 35 = 135$$

۹

جملات مشترک دو دنباله ی حسابی و ایجاد دنباله ی حسابی دیگر

۹



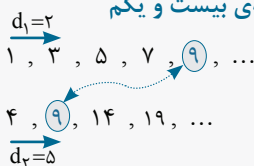
بچه ها! به دو دنباله ی حسابی روبرو نگاه کنید:

اگر جملات مشترک این دو دنباله رو کنار هم بذارم یک دنباله ی حسابی جدید درست می شه:

همون طور که می بینید، قدر نسبت دنباله ی جدید، ک م قدر نسبت های دو دنباله ی قبلیه: $6 = [3, 2]$

تعمیم: جملات مشترک دنباله های حسابی a_n, b_n یک دنباله ی جدیدی به نام c_n ایجاد می کنن که قدر نسبت c_n ، کم قدر نسبت های a_n, b_n هستن.

مثال جملات مشترک دنباله های حسابی $\{1, 3, 5, \dots\}$ و $\{4, 9, 14, \dots\}$ یک دنباله ی حسابی جدید ایجاد کرده اند. جمله ی بیست و یکم دنباله ی جدید کدام است؟



همون طور که می بینید اولین جمله ی دنباله ی جدید برابر ۹ و قدر نسبتش برابر با: $d = [2, 5] = 10$

دنباله ی جدید $\xrightarrow{d=10} 9, 19, 29, \dots \Rightarrow a_{21} = a_1 + 20d = 9 + 20(10) \Rightarrow a_{21} = 209$

۱۰

جمله ی عمومی یک دنباله ی هندسی

۱۰



بچه ها! به اعداد $2, 4, 8, 16, \dots$ خوب دقت کنید. همون طور که می بینید

اگر هر جمله رو در عدد ۲ ضرب کنیم جمله ی بعدی درست می شه.

به دسته ای از اعداد، مثل اعداد بالا، که تقسیم هر جمله به جمله ی ماقبلش برابر با مقدار ثابتی بشه، دنباله ی هندسی می گیم.

به این مقدار ثابت، می گیم قدر نسبت و با q نشونش می دیم. مثلاً: $(1, 3, 9, 27, \dots \Rightarrow q = 3)$

آقا اجازه! در چه صورت یک دنباله ی هندسی اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) و در چه صورت غیر یکنواست؟

در یک دنباله ی هندسی اگر $q > 0$ باشه دنباله یکنواست و اگر $q < 0$ باشه دنباله غیر یکنواست.

برای درک بهتر به مثال هایی که می زنم توجه کن:

$a_1 = 2$
 $q = \frac{1}{2} > 0 \xrightarrow{\text{دنباله}} 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \Rightarrow$ دنباله اکیداً یکنواست

$a_1 = 2$
 $q = \frac{-1}{2} < 0 \xrightarrow{\text{دنباله}} 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \Rightarrow$ دنباله غیر یکنواست



حالا اگه موافق باشید قانونی رو درست کنیم تا به کمک اون بتونیم هر جمله‌ی دلخواه از یک دنباله رو به دست بیاریم:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

$\xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q}$

اگه a_1 رو در q ضرب کنیم a_2 به وجود می‌آد. یعنی: $a_2 = a_1 q$

اگه a_2 رو در q ضرب کنیم a_3 به وجود می‌آد. یعنی: $a_3 = a_2 q$

اگه a_3 رو در q ضرب کنیم a_4 به وجود می‌آد. یعنی: $a_4 = a_3 q$

$\vdots$

اگه a_1 رو در q^{n-1} ضرب کنیم a_n به وجود می‌آد. یعنی: $a_n = a_1 q^{n-1}$

مثال در یک دنباله ی هندسی $a_1 = 5$ و $q = 2$ می‌باشد. جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

$$a_7 = a_1 q^6 = 5 \times (2)^6 = 5 \times 64 = 320$$

مثال در یک دنباله ی هندسی غیریکنوا $a_1 = 4$ و $a_7 = 256$ می‌باشد. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_7 = 256 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 q^6 = 256 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{\text{تصادف غیریکنوا}} q = -2 \quad a_{10} = a_1 q^9 = 4 \times (-2)^9 = -2048$$

۱۱

یافتن قدرنسبت یک دنباله ی هندسی با معلوم بودن دو جمله‌ی دلخواه

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

$\xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q} \xrightarrow{\times q}$

بچه‌ها! به دنباله ی هندسی مقابل نگاه کنید:

$$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \quad \text{آقا اجازه؟ الان می‌فویاید بگیرد: } \frac{a_2}{a_1} = q^1, \quad \frac{a_4}{a_3} = q^1, \quad \frac{a_6}{a_5} = q^1, \dots \text{و گمون کنم می‌فویاید نتیجه بگیرد:}$$

آفرین به تو عزیزیم: از اون جایی که دنباله ی حسابی رو خوب یاد گرفتی، الان به راحتی می‌تونی روابطی که در دنباله ی هندسی وجود داره رو با روابط دنباله ی حسابی شبیه‌سازی کنی.

مثال در یک دنباله ی هندسی غیریکنوا $a_3 = 3$ و $a_7 = 243$ می‌باشد قدرنسبت این دنباله چیست؟

$$\frac{a_7}{a_3} = q^{7-3} \Rightarrow \frac{243}{3} = q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow{\text{تصادف غیریکنوا}} q = -3$$

۱۲

رابطه بین جملات یک دنباله ی هندسی با اندیس‌هایش

بچه‌ها! می‌خواید بدونید، در یک دنباله ی هندسی چه زمانی $\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_l}$ می‌شه؟ پس نگاه کنید:

$$\begin{array}{l} \frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \\ \frac{a_k}{a_l} = q^{k-l} \end{array} \xrightarrow{m-n = k-l} \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_l}$$

$$m - n = k - l \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_l}$$

$$7 - 4 = 11 - 8 \Rightarrow \frac{a_7}{a_4} = \frac{a_{11}}{a_8}$$

$$5 - 3 = 20 - 18 \Rightarrow \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_{20}}{a_{18}}$$

مثال

فکر کنم فهمیدید که چه وقتی $a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_l$ می‌شه؟



آقا اجازه؟

$$\left\{ \begin{array}{l} a_m \cdot a_n = a_1 q^{m-1} \cdot a_1 q^{n-1} = a_1^2 q^{m+n-2} \\ a_k \cdot a_l = a_1 q^{k-1} \cdot a_1 q^{l-1} = a_1^2 q^{k+l-2} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اگه } m+n=k+l \text{ باشه}} a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_l$$

$$m + n = k + l \Rightarrow a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_l$$

مثال

$$\begin{aligned} 3 + 7 = 5 + 5 &\Rightarrow a_3 a_7 = a_5^2 \\ 7 + 9 = 3 + 13 &\Rightarrow a_7 a_9 = a_3 a_{13} \end{aligned}$$

مثال در یک دنباله ی هندسی $a_4 \times a_6 \times a_7 \times a_8 \times a_9$ با کدام گزینه برابر است؟
 $(a_7)^5$ (۴) $(a_7)^6$ (۳) $(a_6)^5$ (۲) $(a_6)^7$ (۱)

$$(a_4 \times a_9)(a_6 \times a_8) \times a_7 = (a_7 \times a_7)(a_7 \times a_7) \times a_7 = a_7^5$$

۱۳

واسطه‌ی هندسی

۱۳

۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ...

بچه‌ها به دنباله ی هندسی روبه‌رو نگاه کنید:

$$8^2 = (4 \times 16) = (2 \times 32) = (1 \times 64)$$

در واقع برای یک دنباله ی هندسی می‌شه روابط زیر رو استخراج کرد:

$$a_{n-k}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k} \Rightarrow$$

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n^2 = a_{n-2} \cdot a_{n+2}$$

⋮

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

$\Rightarrow$ واسطه‌ی هندسی بین جملات a_{n-k} ، a_n ، a_{n+k} هست.

مثال در دنباله ی هندسی $\frac{m+1}{4}$ ، $n-1$ ، n ، 4 حاصل $m+2n$ کدام است؟

$$4, (n), n-1, \frac{m+1}{4} \Rightarrow n^2 = 4(n-1) \Rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \Rightarrow (n-2)^2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله}} 4, 2, 1, \frac{m+1}{4} \Rightarrow \frac{m+1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m+1 = 2 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow m+2n = 5$$

۱۴

درج تعدادی واسطه‌ی هندسی بین دو عدد

۱۴

بچه‌ها! این مفهوم رو با یه مثال شروع می‌کنم و بعد بهش عمومیت می‌دم.

مثال پنج واسطه‌ی هندسی بین دو عدد ۱۲۸ و ۲ درج نمائید. یعنی:

$$2, \bigcirc, \dots, \bigcirc, 128$$

جمعه ۵

a_1 a_6

اگر قدر نسبت این دنباله معلوم بشه، مسئله حله. از اونجایی که دو جمله از این دنباله معلومه، پس قدر نسبت رو می‌شه به‌دست آورد:

$$\frac{a_6}{a_1} = q^5 \Rightarrow \frac{128}{2} = q^5 \Rightarrow q^5 = 64 \Rightarrow q = \pm 2$$

$$\begin{aligned} q=2 &\rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \\ q=-2 &\rightarrow 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128 \end{aligned}$$

بچه‌ها! در حالت کلی اگر بخواید بین دو عدد a, b به تعداد m واسطه‌ی هندسی درج کنید کافیست قدر نسبت رو از رابطه‌ی زیر

به‌دست بیارید:

$$a, \bigcirc, \dots, \bigcirc, b$$

جمعه m

a_1 a_{m+2}

$$\Rightarrow \frac{a_{m+2}}{a_1} = q^{(m+2)-(1)} \Rightarrow \frac{b}{a} = q^{m+1}$$

۱۵

حاصل ضرب n جمله‌ای اول یک دنباله ی هندسی

۱۵

بچه‌های عزیز! حاصل ضرب n جمله‌ی اول یک دنباله ی هندسی رو که براتون نوشتیم با دقت نگاه کنید:

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

فکر می‌کنید می‌شه قانونی برای محاسبه ی P_n به وجود آورد؟



آقا! فکر کنم بشه. به نظرم اگه جمله‌ی اول و آخر، دوم یکی مونده به آخر و ... رو کنار هم قرار بدیم به قانون مورد نظرمون می‌رسیم:

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

$$P_n = (a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times ()$$

$$P_n = (a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times (a_1 a_n) \Rightarrow P_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

جمله‌ی اول جمله‌ی آخر

مثال $P_{50} = (a_1 a_{50})^{\frac{50}{2}}$

مثال $P_{35} = (a_1 a_{35})^{\frac{35}{2}} \xrightarrow{1+35=18+18} P_{35} = (a_{18} \times a_{18})^{\frac{35}{2}} = (a_{18}^2)^{\frac{35}{2}} = (a_{18})^{35}$

$$P_1 = (a_1 a_1)^{\frac{1}{2}}$$

↓ ↓
۳ ؟

مثال در یک دنباله ی هندسی $a_1 = 3$ و $q = 2$ می‌باشد. حاصل ضرب ۱۰ جمله‌ی اول این دنباله چیست؟

$$a_{10} = a_1 q^9 = 3(2)^9 \Rightarrow P_{10} = (3 \times 3 \times 2^9)^5 = 3^{10} \times 2^{45}$$

۱۶

مجموع n جمله‌ای اول یک دنباله ی هندسی

۱۶

بچه‌ها! این دفعه می‌خوام برای مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله ی هندسی رابطه‌ای پیدا کنم: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

اگه موافق باشید جملات این دنباله رو می‌خوام باز کنم. یعنی:

آقا اجازه؟ جملات این دنباله رو باز کردید که پی بشه؟

عجله نکنید! اگه من تساوی بالا رو در یک q ضرب کنم به یک تساوی دیگه می‌رسم. (یعنی: $q \neq 0$)

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n \quad (2)$$

حالا اگه تساوی‌های شماره‌ی (۱) و (۲) رو زیر هم بنویسم و از هم کم کنم به یک تساوی کوچولو و فانتزی می‌رسم که به کمک

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

اون می‌شه S_n رو به دست آورد.

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

$$\ominus \quad \begin{array}{r} S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n \\ \hline S_n(1-q) = a_1(1-q^n) \end{array} \Rightarrow S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

تساوی فانتزی

مثال $S_{20} = a_1 \frac{1-q^{20}}{1-q}$

مثال $S_{45} = a_1 \frac{1-q^{45}}{1-q}$

مثال در یک دنباله ی هندسی جمله ی اول برابر ۳ و قدر نسبت برابر ۲- می باشد مجموع هفت جمله ی اول این دنباله چیست؟

$$S_7 = a_1 \frac{1-q^7}{1-q} \xrightarrow{a_1=3, q=-2} S_7 = 3 \times \frac{1-(-2)^7}{1-(-2)} = 3 \times \frac{1-(-128)}{3} = 129$$

مثال در یک دنباله ی هندسی یکنوا، مجموع هشت جمله ی اول، ۱۷ برابر مجموع چهار جمله ی اول است. قدر نسبت دنباله چیست؟

$$S_8 = 17S_4 \Rightarrow a_1 \frac{1-q^8}{1-q} = 17 \times a_1 \frac{1-q^4}{1-q} \Rightarrow (1-q^8) = 17(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = 17(1-q^4)$$

$$\Rightarrow 1+q^4 = 17 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow[q>0]{\text{تصادف یکنواست}} q = 2$$

مثال حاصل عبارت $(1+x+x^2+\dots+x^9)(1-x+x^2-\dots+x^9)$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

$$(1+x+x^2+\dots+x^9)$$

$$(1-x+x^2-\dots+x^9)$$

$$a_1=1, q=x, \text{ تعداد جملات } = 10$$

$$a_1=1, q=-x, \text{ تعداد جملات } = 10$$

بچه ها! بهتون پیشنهاد می کنم اول عبارت رو تا حد امکان ساده کنید بعد $x=\sqrt{2}$ رو توش بنویسید. در غیر این صورت با مشکل مواجه می شید.

$$\left(1 \times \frac{1-(x)^{10}}{1-x}\right) \times \left(1 \times \frac{1-(-x)^{10}}{1-(-x)}\right) = \frac{1-x^{10}}{1-x} \times \frac{1+x^{10}}{1+x} = \frac{1-x^{10}}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{1-(\sqrt{2})^{10}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{1-2^5}{1-2} = \frac{1-32}{-1} = 31$$

۱۷

مجموع تمام جملات یک دنباله ی هندسی

۱۷

بچه ها! اگر ممکنه مقادیر $(\frac{1}{2})^{+\infty}, (\frac{-1}{2})^{+\infty}, (2)^{+\infty}, (-2)^{+\infty}$ رو به دست بیارید.



آقا؟ کمی فرصت ببرید تا به دست بیاریم.

$$\begin{cases} (\frac{1}{2})^{+\infty} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})\dots \approx 0 \\ (\frac{-1}{2})^{+\infty} = (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2})\dots \approx 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2)^{+\infty} = (2)(2)(2)\dots \approx +\infty \\ (-2)^{+\infty} = (-2)(-2)(-2)\dots \approx \pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < q < 1 \Rightarrow q^{+\infty} \approx 0 \\ q < -1 \text{ یا } q > 1 \Rightarrow q^{+\infty} \approx \pm\infty \end{cases}$$

آفرین به شما! با توجه به محاسبه ای که انجام دادید می خوام یک نتیجه ی مهم بگیرم:



بچه ها! حالا می خوام مجموع تمام جملات یک دنباله ی هندسی رو به دست بیارم. با توجه به این که تعداد جملات دنباله ،

بی شمار هست (یعنی $n \rightarrow \infty$) پس کافیه رابطه ی S_n رو بنویسم و n رو به سمت ∞ میل بدم:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = a_1 \frac{1-q^\infty}{1-q}$$

$-1 < q < 1 \Rightarrow q^\infty \approx 0$

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$

$q < -1 \text{ یا } q > 1 \Rightarrow q^\infty \approx \pm\infty \Rightarrow S_\infty = \infty$

اگر مجموع تمام جملات یک دنباله ی هندسی (با قدر نسبت $-1 < q < 1$) رو بخوان کافیه مقدار $\frac{a_1}{1-q}$ (جمله ی اول / قدر نسبت) رو به دست بیارید.

مثال $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = ? \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{2}} S_{\infty} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

مثال $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{8}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{16}) + \dots = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \xleftarrow{a_1 = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{4} \xleftarrow{a_1 = \frac{1}{4}, q = \frac{1}{2}} 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

مثال جواب معادله $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{2x-1}$ با شرط $0 < x < 1$ چیست؟

$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2x-1} \Rightarrow 2x-1=1-x \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$

$a_1=1, q=x \rightarrow \frac{1}{1-x}$

۱۸ اگر ۳ جمله‌ی غیرمتوالی از یک دنباله‌ی حسابی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی را بدهند ۱۸

بچه‌ها! این بحث رو می‌خوام با یک مثال شروع کنم.



مثال جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی، به ترتیب و در کنار هم یک دنباله‌ی هندسی را تشکیل داده‌اند. قدر

نسبت دنباله‌ی هندسی ایجاد شده چیست؟

نسبت دنباله‌ی هندسی ایجاد شده چیست؟

نسبت دنباله‌ی حسابی: $a_4, \dots, a_6, \dots, a_{12}$

نسبت دنباله‌ی هندسی: $a_4, a_6, a_{12} \Rightarrow a_6^2 = a_4 \times a_{12} \Rightarrow (a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$

$\Rightarrow a_1^2 + 4a_1d + 4d^2 = a_1^2 + 11a_1d + 11d^2 \Rightarrow -4a_1d = 7d^2 \Rightarrow \boxed{a_1 = -\frac{7}{4}d}$

بنابراین:

$a_4 = a_1 + 3d = -\frac{7}{4}d + 3d = \frac{5}{4}d$

$a_6 = a_1 + 5d = -\frac{7}{4}d + 5d = \frac{13}{4}d$

$a_{12} = a_1 + 11d = -\frac{7}{4}d + 11d = \frac{37}{4}d$

$\frac{a_6}{a_4} = \frac{13}{5}, \frac{a_{12}}{a_6} = \frac{37}{13} \Rightarrow \boxed{q = 3}$

بچه‌ها! چه‌طوره به جای راه حل بالا که راهی متداول در تمام کتاب‌ها از راه حل زیر استفاده کنم؟



$a_4, a_6, a_{12} \Rightarrow q = \frac{12-6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$

آقا اجازه؟ پقدر سریع به‌رست اوامر!!!



بچه‌ها! اثباتی که برای ایجاد این روش تستی بکار بردم، یک صفحه رو اشغال کرد. پس لطفاً این قانون رو بدون اثبات از من قبول کنید.



روش تستی: در دنباله‌ی حسابی $a_m, \dots, a_n, \dots, a_k$ اگر جملات a_m, a_n, a_k تشکیل یک دنباله‌ی هندسی را بدن، قدر

نسبت دنباله‌ی هندسی ایجاد شده برابر است با: $q = \frac{k-n}{n-m}$

مثال در یک دنباله‌ی حسابی جملات دوم، پنجم و چهاردهم به ترتیب تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت q را داده‌اند. مقدار q کدام است؟

$a_2, a_5, a_{14} \xrightarrow{\text{تصادف هندسی}} q = \frac{14-5}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$

آموزش تکمیلی فصل (۸) در قالب تست

- ۱ اگر $(3x+3)$ و $(2x-4)$ و $(2x+1)$ به ترتیب از چپ به راست جملات اول، چهارم و هفتم یک دنباله ی عددی باشند، جمله دوم چیست؟
 (گزینه ی دو - ۸۷)

$$-\frac{74}{3} \quad (1) \quad -\frac{75}{3} \quad (2) \quad -\frac{77}{3} \quad (3) \quad -\frac{78}{3} \quad (4)$$
- ۲ در دنباله ی حسابی با قدر نسبت d ، یکبار جملات با زیر نویس مضرب ۳ و بار دیگر جملات با زیر نویس فرد را حذف کرده ایم. دنباله ی جدید:
 (استاد خامدا (سر گروه قزوین)
 (۱) دنباله ی حسابی با قدر نسبت $\frac{d}{3}$ است. (۲) دنباله ی حسابی با قدر نسبت $\frac{d}{6}$ است.
 (۳) دنباله ی حسابی با قدر نسبت $\frac{d}{2}$ است. (۴) دنباله ی حسابی نیست.
- ۳ در یک دنباله ی حسابی $a_7 = 5$ و $a_4 - a_1 = 120$ است. قدر نسبت این تصاعد کدام است؟
 (دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

$$6 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (4)$$
- ۴ اگر a_n جمله ی عمومی یک دنباله ی حسابی بوده و جملات دوم و هشتم این دنباله، ریشه های معادله ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، مجموع مربعات جملات دوم، پنجم و هشتم این دنباله کدام است؟
 (استاد موسوی (سر گروه هرمزگان)

$$16 \quad (1) \quad 18 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 22 \quad (4)$$
- ۵ در یک دنباله ی حسابی مجموع جملات سوم، هفتم و یازدهم برابر ۶- بوده و مجموع مربعات آن ها ۳۰۰ می باشد. در بین سه جمله ی مذکور، کوچکترین جمله کدام است؟
 (استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)

$$-14 \quad (1) \quad -16 \quad (2) \quad -18 \quad (3) \quad -20 \quad (4)$$
- ۶ در یک دنباله ی عددی، جمله ی اول ۱۴- و جمله ی آخر ۴۰ و تعداد جملات ۹۱ می باشد. این دنباله چند جمله ی منفی دارد؟
 (آموزش و پرورش - ۸۶)

$$12 \quad (1) \quad 67 \quad (2) \quad 24 \quad (3) \quad 25 \quad (4)$$
- ۷ در یک دنباله ی حسابی اکیدا صعودی، جمله ی چهارم ۳ برابر جمله ی دوازدهم است. این دنباله چند جمله ی منفی دارد؟
 (استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)

$$14 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ بی شمار}$$
- ۸ تعداد اعداد طبیعی فرد و بخش پذیر بر ۷ که سه رقمی هستند، کدام است؟

$$63 \quad (1) \quad 64 \quad (2) \quad 65 \quad (3) \quad 66 \quad (4)$$
- ۹ صد و یک جمله ی اول دنباله ی حسابی $2, 2, 6, \dots$ با هشتاد و پنج جمله ی اول دنباله ی حسابی $1, 4, 9, \dots$ چند جمله ی مساوی دارند؟
 (استاد جوادی (عضو گروه ریاضی آذربایجان غربی)

$$22 \quad (1) \quad 21 \quad (2) \quad 20 \quad (3) \quad 19 \quad (4)$$
- ۱۰ در یک دنباله ی عددی اگر یک واحد از جمله ی اول کم کرده و دو واحد به قدر نسبت بیافزاییم به مجموع ۲۰ جمله ی اول چند واحد افزوده می شود؟

$$345 \quad (1) \quad 350 \quad (2) \quad 355 \quad (3) \quad 360 \quad (4)$$
- ۱۱ در دنباله ی حسابی غیر ثابت $\{a_n\}$ ، مجموع جملات اول، چهارم و دهم برابر ۳۰ می باشد. حاصل $a_7 + a_8$ کدام است؟
 (استاد زمانی (سر گروه آذربایجان شرقی)

$$10 \quad (1) \quad 15 \quad (2) \quad 30 \quad (3) \quad 20 \quad (4)$$
- ۱۲ تعداد جملات منفی دنباله ی حسابی $\dots, -369, -372$ کدام است؟
 (استاد عادل ابراهیمی (تهران)

$$124 \quad (1) \quad 125 \quad (2) \quad 126 \quad (3) \quad 127 \quad (4)$$
- ۱۳ در یک دنباله ی عددی $s_9 - 6s_6 = 0$ است. حاصل $\frac{a_1}{a_4}$ کدام است؟ a_n جمله ی عمومی دنباله و S_n مجموع n جمله ی اول است.
 (استاد عادل مهر پاک (همدان)

$$7 \quad (1) \quad 5 \quad (2) \quad 6 \quad (3) \quad 3 \quad (4)$$
- ۱۴ در تصاعد $\log_2 \sqrt{x}, \log_2 \frac{x}{2}, \log_2 x\sqrt{x}, \dots$ مجموع ۱۰ جمله ی اول کدام است؟
 (استاد عادل مهر پاک (همدان)

$$\frac{65}{2} \log_2 \frac{x}{4} \quad (1) \quad 55 \log_2 \frac{x}{4} \quad (3) \quad 65 \log_2 \frac{x}{4} \quad (2) \quad \frac{65}{2} \log_2 \frac{x}{4} \quad (4)$$

آموزش تکمیلی فصل (۸) در قالب تست

۱۵ در دنباله ی عددی $9, -12, -15, \dots$ مجموع جملات طبیعی و دو رقمی کدام است ؟

- (۱) ۶۱۰۵ (۲) ۶۱۰۰ (۳) ۶۰۹۵ (۴) ۶۰۹۰

۱۶ در یک دنباله ی حسابی مجموع نه جمله ی اول ۵۴ و مجموع ده جمله ی اول ۵۰ است . مجموع چهارده جمله ی اول این

استاد دراپش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)

دنباله کدام است ؟

- (۱) ۰ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۸

۱۷ در دنباله ای با جمله ی عمومی $a_n = 3n + 1$ ، حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k-1}$ کدام است ؟ ($k \in \mathbb{N}$)

استاد مریم عالی (سر گروه کرمان)

- (۱) $3k^2 - k$ (۲) $3k^2 + k$ (۳) $3k^2 - 2k$ (۴) $3k^2 + 2k$

۱۸ در بیست جمله ی اول از یک تصاعد عددی ، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد . جمله ی

(سراسری - ۸۵)

اول کدام است ؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۹ در یک دنباله ی حسابی نزولی، مجموع ۵ جمله ی دوم، برابر مجموع ۴ جمله ی اول است . این دنباله چند جمله ی مثبت دارد ؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

۲۰ اگر $S_n = 2n^2 + n$ مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی حسابی بوده و a_n جمله ی عمومی آن باشد ، حاصل

استاد فخر لویی (سر گروه آذربایجان غربی)

$a_1 + a_2 + \dots + a_n$ کدام است ؟

- (۱) ۱۰۱۵۰ (۲) ۱۰۰۵۰ (۳) ۹۹۵۰ (۴) ۹۹۰۰

(گزینۀ ی دو- ۸۷)

۲۱ در یک دنباله ی حسابی $(\forall n \in \mathbb{N} : S_n = na_n)$ می باشد . قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۰ (۴) $\frac{2}{3}$

۲۲ اعداد طبیعی را به شکل روبرو دسته بندی کرده ایم. $(1), (2, 3), (4, 5, 6, 7), (8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15), \dots$

مجموع جملات دسته ی هفتم چیست ؟ (توجه : تعداد جملات دسته ها ، یک دنباله ی هندسی می سازند)

- (۱) ۶۱۱۲ (۲) ۴۰۸۹۶ (۳) ۶۲۱۱ (۴) ۴۰۹۸۶

۲۳ زوایای داخلی یک ۵ ضلعی محدب بر حسب درجه تشکیل یک دنباله ی حسابی داده اند . اگر قدر نسبت این دنباله 4° باشد

استاد مهادی (عضو گروه ریاضی آذربایجان غربی)

کوچکترین زاویه ی داخلی کدام است ؟

- (۱) 100° (۲) 102° (۳) 104° (۴) 106°

۲۴ اگر اعداد ${}^3\log_a k$ و ${}^2\log_4^a$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی غیر یکنوا بوده و a و b ریشه های معادله ی

استاد فاندز (عضو گروه ریاضی اصفهان)

$x^2 + 13x + 16 = 0$ باشند ، مقدار k کدام است ؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) -۲ (۴) -۳

۲۵ اعداد 2^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی بوده و a و b ریشه های معادله ی $mx^2 + (1-2m)x - 1 = 0$

می باشند . m کدام است ؟

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۲۶ اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشد، معادله ی $4x^2 - 4\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}x + n\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 0$

استاد عادل مهر پاک (همدان)

چند ریشه دارد ؟ ($n \in \mathbb{N}$)

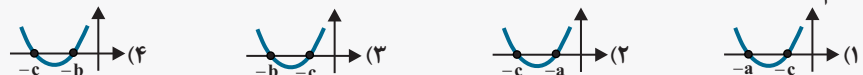
(۱) ریشه ی حقیقی ندارد . (۲) ۱ ریشه ی حقیقی دارد .

(۳) ۲ ریشه ی حقیقی و متمایز دارد . (۴) ۱ یا ۲ ریشه ی حقیقی دارد .

۲۷ اگر $\log_{\frac{c}{a}} x$ و $\log_{\frac{b}{a}} x$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی نزولی باشند ، نمودار تابع $y = x^2 + (a+c)x + b^2$

دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

کدام است ؟



آموزش تکمیلی فصل (۸) در قالب تست

(سنجش-۸۵)

۲۸ واسطه ی هندسی بین جملات نهم و پانزدهم از دنباله ی عددی $0, 4, 8, \dots$ کدام است ؟

$$(1) 14\sqrt{6} \quad (2) 32\sqrt{2} \quad (3) 16\sqrt{3} \quad (4) 16\sqrt{7}$$

۲۹ اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت ۳- باشند، چه تعداد از دنباله های زیر هندسی هستند ؟

$$\text{الف) } (a_1 + 9), (a_2 - 3), (a_3 + 1) \quad \text{ب) } (a_1 - 2), (a_2 + 6), (a_3 - 18) \quad \text{ج) } (a_1^2 + 1), (a_2^2 + 9), (a_3^2 + 81)$$

امیر مسین نصیری (تهران)

$$(1) 0 \quad (2) 1 \quad (3) 2 \quad (4) 3$$

۳۰ در یک دنباله ی هندسی $a_1 + a_2 + a_3 = -18$ و $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 36$ می باشد. حاصل $a_3 - a_4 + a_5$ کدام است ؟

$$(1) -72 \quad (2) -168 \quad (3) 108 \quad (4) 90$$

۳۱ وسطهای اضلاع یک شش ضلعی منتظم به ضلع ۲ متر را به هم وصل می کنیم تا ۶ ضلعی منتظم جدیدی حاصل شود. سپس وسطهای اضلاع

شش ضلعی منتظم جدید را به هم وصل کرده و این کار را به طور متوالی تکرار می کنیم. محیط هفتمین شش ضلعی منتظم چند متر

دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)

است ؟

$$(1) \frac{64}{25} \quad (2) \frac{8}{5} \quad (3) \frac{9}{4} \quad (4) \frac{81}{16}$$

۳۲ جمله ی سوم یک دنباله ی هندسی یکنوا برابر ۱۶ می باشد. به جمله ی دوم این دنباله چه عددی اضافه شود تا سه جمله ی اول، یک

دنباله ی حسابی با قدر نسبت ۶ تشکیل دهند ؟

$$(1) 6 \quad (2) 4 \quad (3) 2 \quad (4) 0$$

۳۳ قدر نسبت یک دنباله ی هندسی، جواب معادله ی $\log \sqrt{2} = 2 \log (2x + 3)$ و جمله ی پنجم این دنباله برابر $-\frac{1}{16}$ می باشد.

(آموزش و پرورش-۸۷)

مجموع چهار جمله ی اول این دنباله کدام است ؟

$$(1) \frac{-7}{8} \quad (2) \frac{-5}{8} \quad (3) \frac{3}{8} \quad (4) \frac{11}{6}$$

۳۴ در دنباله ی هندسی و غیر یکنوای $a, 9, b, \dots$ مجموع ۶ جمله ی اول چند است ؟

$$(1) -\frac{133}{32} \quad (2) \frac{665}{8} \quad (3) -\frac{131}{32} \quad (4) \frac{673}{8}$$

دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

۳۵ دنباله ی هندسی $\dots, x, y, z, \frac{1}{y}, \dots$ غیر نزولی است. حاصل $S_6(2 + \sqrt{2})$ کدام است ؟

$$(1) \frac{7}{2} \quad (2) 7 \quad (3) 14 \quad (4) 28$$

۳۶ بین دو عدد ۱ و ۶۴ پنج واسطه ی حسابی درج کرده ایم و جمله ی وسط A می باشد. بین همین دو عدد نیز پنج واسطه ی هندسی

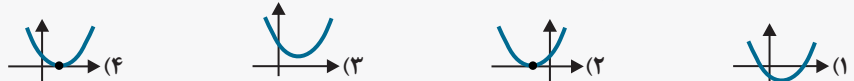
(آزاد-۷۸)

درج کرده ایم و جمله ی وسط B است. کدام گزینه درست است ؟

$$(1) A + B = 40 \quad (2) A - B = 24 \quad (3) A = B \quad (4) A = \sqrt{B}$$

۳۷ اگر a_n جمله ی عمومی یک دنباله ی هندسی غیر یکنوا بوده و حد مجموع جملات این دنباله مثبت باشد، نمودار تابع

استاد ممبئی بیات (سر گروه همدان)

 $y = a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3$ کدام است ؟

۳۸ در یک دنباله ی هندسی نامحدود، هر جمله نصف مجموع جملات بعدی است. جمله ی پنجم چند برابر جمله ی دوم است ؟

استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)

$$(1) \frac{4}{9} \quad (2) \frac{8}{27} \quad (3) \frac{1}{8} \quad (4) \frac{1}{3}$$

۳۹ حد مجموع جملات یک دنباله ی هندسی ۴ برابر حد مجموع جملات با زیر نویس زوج می باشد. قدر نسبت این دنباله چقدر است ؟

استاد زمانی (سر گروه آذربایجان شرقی)

$$(1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{1}{5} \quad (4) \frac{1}{6}$$

۴۰ در یک دنباله ی حسابی و یک دنباله ی هندسی، جملات اول باهم برابرند و مجموع دو جمله ی اول دنباله ی حسابی برابر

جمله ی دوم دنباله ی هندسی بوده و مجموع چهار جمله ی اول دنباله ی حسابی برابر جمله ی سوم دنباله ی هندسی می باشد.

قدر نسبت دنباله ی هندسی چقدر است ؟

$$(1) 6 \quad (2) 5 \quad (3) 4 \quad (4) 3$$

آموزش تکمیلی فصل (۸) در قالب تست

۴۱) بین اعداد ۲ و ۵۰ حداقل چند واسطه ی هندسی درج کنیم تا حاصلضرب تمام جملات دنباله ی تشکیل شده ، بیشتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد ؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

۴۲) در یک تصاعد عددی ، جملات سوم ، هفتم و نهم ، سه جمله ی متوالی از یک تصاعد هندسی می باشند . چندمین جمله ی این تصاعد

(سراسری-۸۸)

عددی ، صفر است ؟

- ۹ (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

۴۳) سه جمله ی اول یک دنباله ی هندسی مفروض اند . اگر بین جملات اول و دوم ، ۲ جمله و بین جملات دوم و سوم ، ۵ جمله درج کنیم ،

۱۰ جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی بدست می آید . قدر نسبت دنباله ی هندسی چیست ؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) استاد درایش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)

(۲): ۸

به دنبال تعداد اعداد طبیعی فرد و سه رقمی هستیم که به ۷ بخش پذیرن. پس به مرحله‌ی که طی می‌کنیم خوب توجه کنید:

اعداد طبیعی بخش پذیر به ۷: ۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ۳۵, ...

اعداد طبیعی فرد و سه رقمی بخش پذیر به ۷: ۷, ۲۱, ۳۵, ...

$$a_n = 14n - 7$$

از اونجایی که می‌خواهیم جملات این دنباله سه رقمی باشند، پس باید: $100 \leq a_n \leq 999$

باتوجه به ۱: $100 \leq 14n - 7 \leq 999 \Rightarrow 107 \leq 14n \leq 1006 \Rightarrow 7/... \leq n \leq 71/... \Rightarrow 8 \leq n \leq 71 \Rightarrow \text{تعداد جملات} = (71 - 8) + 1 = 64$

(۳): ۹

$$\begin{cases} a_n: -2, 2, 6, 10, 14, \dots, a_{101} \\ b_n: -1, 4, 9, 14, 19, \dots, b_{85} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{101} = a_1 + 100d = -2 + 100(4) = 398 \\ b_{85} = b_1 + 84d = -1 + 84(5) = 419 \end{cases}$$

اولین جمله‌ی مشترک a_n و b_n

حالا باید دنباله‌ی c_n رو مشخص کنیم که از جملات مشترک a_n و b_n درست شده. همونطور که در قسمت آموزش گفتیم، قدر نسبت دنباله‌ی

c_n برابره با k م قدر نسبت های a_n و b_n :

$c_n: \begin{cases} c_1 = 14 \\ d = [4, 5] = 20 \end{cases} \Rightarrow c_n: 14, 34, 54, \dots$

$$c_n = 20n - 6$$

از اونجایی که دنباله‌ی c_n از جملات مشترک a_n و b_n تشکیل شده، پس آخرین جمله‌ی c_n باید از آخرین جمله‌ی a_n و b_n کوچکتر یا مساوی باشه. یعنی:

تعداد جملات c_n : $1 \leq n \leq 20 \Rightarrow 1 \leq n \leq 20/... \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 1 \leq n \leq 20 \Rightarrow \text{تعداد جملات } c_n = 20$

(۴): ۱۰

در دنباله‌ی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$ مجموع ۲۰ جمله‌ی اول برابره با: $S_p = 10(2a_1 + 19d)$

اگر از جمله‌ی اول دنباله یک واحد کم و به قدر نسبت ۲ واحد اضافه کنیم به یک دنباله‌ی جدید می‌رسیم:

$b_1 = a_1 - 1$
 $d' = d + 2$

دنباله جدید: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_p$

اگر مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی جدید رو S'_p فرض کنیم، اون موقع:

$$S'_p = \frac{p}{2}(2b_1 + 19d') = 10(2(a_1 - 1) + 19(d + 2)) = 10(2a_1 + 19d + 36) = 10(2a_1 + 19d) + 360 \Rightarrow S'_p = S_p + 360$$

(۴): ۱۱

$$a_1 + a_6 + a_{11} = 30 \Rightarrow a_7 + a_8 = ?$$

$$a_1 + (a_1 + 5d) + (a_1 + 10d) = 30 \Rightarrow 3a_1 + 15d = 30 \Rightarrow a_1 + 5d = 10 \Rightarrow a_6 = 10$$

باتوجه به ۱: $a_7 + a_8 = 2a_6 = 20$

خواسته مسئله

(۱): ۱۲

می‌خواهیم مجموع جملات منفی دنباله‌ی حسابی $372, -369, \dots$ رو حساب کنیم:

$a_1 = -372$
 $d = 3$

$$a_n = 3n - 375$$

برای تعیین تعداد جملات منفی باید $a_n < 0$ بشه:

این دنباله ۱۲۴ جمله‌ی منفی داره: $3n - 375 < 0 \Rightarrow 3n < 375 \Rightarrow n < 125 \Rightarrow n \leq 124$

(۱): ۱۳

$$S_9 = 6S_6 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 6 \times \frac{6}{2}(2a_1 + 5d) \Rightarrow 9a_1 + 36d = 36a_1 + 90d \Rightarrow a_1 = -2d$$

خواسته مسئله: $\frac{a_1}{a_6} = \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 2d} \xrightarrow{\text{باتوجه به ۱}} \frac{-2d + 5d}{-2d + 2d} = \frac{3d}{0} = \text{undefined}$

(۳): ۱۴

بچه‌ها! قبل از اینکه مجموع ۱۰ جمله‌ی اول تصاعد $\log_7^x, \log_7^{x^2}, \log_7^{x^3}, \dots$ رو بدست بیاریم، باید ببینیم این تصاعد، حسابیه یا هندسی:

$\log_7^{\frac{1}{x}}, \log_7^x, \log_7^{x^2}, \dots \Rightarrow \frac{1}{x}, x, x^2, \dots$

این تصاعد، یک دنباله‌ی حسابیه که جمله‌ی اولش $(a_1 = \frac{1}{x} \log_7^x)$ و قدر نسبتش $(d = \frac{1}{x} \log_7^x)$ هست.

خواسته مسئله: $S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5(\log_7^x + \frac{9}{x} \log_7^x) = 5(\frac{11}{x} \log_7^x) = \frac{55}{x} \log_7^x = 55 \log_7^x$

(۱): ۱۵

می‌خواهم مجموع جملات طبیعی و دورقمی دنباله ی عددی $9, -12, -15, \dots$ رو بدست بیارم.

$$\begin{array}{c} +3 \quad +3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ -15, -12, -9, \dots \end{array} \xrightarrow{\text{جمله ی عمومی}} a_n = 3n - 18 \quad (1)$$

به همین منظور باید اولین، آخرین و تعداد جملات طبیعی و دو رقمی این دنباله رو مشخص کنم:

$$10 \leq a_n \leq 99 \xrightarrow{\text{باتوجه به (1)}} 10 \leq 3n - 18 \leq 99 \Rightarrow 28 \leq 3n \leq 117 \Rightarrow 9 \dots \leq n \leq 39 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 10 \leq n \leq 39$$

طبیعی و دو رقمی هستن و تعدادشون ۳۰ تا ست. $(39 - 10 + 1)$

همونطور که می بینید جملات

$$S_{30} = \frac{30}{2}(12 + 99) = 15 \times 111 = 1665$$

جمله ی مورد نظر: $12, \dots, 99$: ۳۰ جمله

$$\begin{array}{cc} (a_1, a_2, \dots, a_{39}) & \\ \downarrow (1) & \downarrow (1) \\ 3(10) - 18 & 3(39) - 18 \end{array}$$

(۲): ۱۶

$$\begin{cases} S_9 = 54 \Rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 54 \Rightarrow 9a_1 + 36d = 54 \\ S_{10} = 50 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 50 \Rightarrow 10a_1 + 45d = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 6 \\ a_1 + 4.5d = 5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو تساوی رو از هم کم می کنیم}} \begin{array}{c} (1) \\ d = -2 \end{array} \xrightarrow{\text{باتوجه به رابطه ی } a_1 + 4d = 6} \begin{array}{c} (2) \\ a_1 = 14 \end{array}$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2a_1 + 13d) \xrightarrow{\text{باتوجه به (1) و (2)}} 7(28 - 26) = 14$$

خواسته مسئله: S_{14}

(۲): ۱۷

در این مسئله، ضابطه ی دنباله ی عددی a_n رو داریم $(a_n = 3n + 1)$ و حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k-1}$ رو می‌خواهم.

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به (1)}} a_1 = 4 \text{ و } a_{2k-1} = 3(2k-1) + 1 = 6k - 2 \text{ و تعداد جملات } = k$$

$$\text{مجموع } k \text{ جمله ی مورد نظر} = \frac{k}{2}(a_1 + a_{2k-1}) = \frac{k}{2}(4 + 6k - 2) = \frac{k}{2}(6k + 2) = 3k^2 + k$$

(۱): ۱۸

$$\underbrace{a_1 + a_3 + \dots + a_{19}}_{\text{جمله ۱۰}} = 135 \Rightarrow \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \Rightarrow a_1 = 13/5$$

$$\underbrace{a_2 + a_4 + \dots + a_{20}}_{\text{جمله ۱۰}} = 150 \Rightarrow \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) = 150 \Rightarrow a_{11} = 15$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_1 = 10/5 \Rightarrow d = 2/5 \\ a_{11} = 15 \Rightarrow a_1 + 10d = 15 \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{خواسته مسئله}} a_1 = 0$$

(۱): ۱۹

$$\begin{cases} \text{مجموع ۵ جمله دوم} = S_{10} - S_5 \\ \text{مجموع ۴ جمله اول} = S_4 \end{cases} \xrightarrow{\text{باتوجه به مسئله}} S_{10} - S_5 = S_4$$

$$S_{10} - S_5 = S_4 \Rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) - \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) \Rightarrow 10a_1 + 45d - 5a_1 - 10d = 4a_1 + 6d \Rightarrow a_1 + 29d = 0 \Rightarrow a_7 = 0$$

از اونجایی که گفته شده، این دنباله اکیداً نزولیه و با توجه به اینکه جمله ی سی ام برابر با صفر، پس ۲۹ جمله ی اول این دنباله مثبت و از جمله ی سی و یکم به بعد، تمامی جملات منفی هستن.

(۱): ۲۰

در قسمت آموزش گفتیم که ضابطه ی S_n در یک دنباله ی حسابی برابره با: $S_n = \frac{d}{2}(n)^2 + k(n)$

$$S_n = 2n^2 + n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3 \\ \frac{d}{2} = 2 \Rightarrow d = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمله ی عمومی}} a_n = 4n - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_7 = 27 \\ a_{100} = 399 \end{cases}$$

$$\text{خواسته مسئله: } a_7 + a_8 + \dots + a_{100} = \frac{50}{2}(a_7 + a_{100}) = 25(27 + 399) = 25 \times 426 = 10650$$

مجموع ۵۰ جمله

(۳): ۲۱

$$S_n = na_n \Rightarrow \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_n \Rightarrow \frac{a_1}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n \Rightarrow \frac{a_1}{2} = \frac{a_n}{2} \Rightarrow a_1 = a_n \Rightarrow a_1 = a_1 + (n-1)d \Rightarrow d = 0$$

(۱): ۲۲

دسته ی اول (۱) ، دسته ی دوم (۲، ۳) ، دسته ی سوم (۴، ۵، ۶، ۷) ، دسته ی چهارم (۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵) ، ...

↓ جمله ۱ ↓ جمله ۲ ↓ جمله ۴ ↓ جمله ۸

تعداد جملات هر دسته ، با اولین جمله ی اون دسته برابره .

اگر کمی دقت کنید می بینید که اولین جمله ی دسته n ام 2^{n-1} آخرین جمله ی دسته n ام $2^n - 1$

$$\text{مجموع جملات دسته ی هفتم} = \underbrace{64 + 65 + 66 + \dots + 127}_{\text{جمله ۶۴}} = \frac{64}{2} (64 + 127) = 22 \times 191 = 6112$$

(۱): ۲۳

در شکل روبرو a_1 کوچکترین و a_5 بزرگترین زاویه ی داخلی این ۵ ضلعیه .از طرفی $a_1, a_2, \dots, a_5$ یک دنباله ی حسابی با قدر نسبت ۴ درجه رو تشکیل دادن .با توجه به اینکه مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی محدب برابره با $(n-2) \times 180$ پس میشه گفت :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (5-2) \times 180 \Rightarrow S_5 = 540 \Rightarrow \frac{5}{2} (2a_1 + 4d) = 540 \xrightarrow{d=4} 5a_1 + 40 = 540 \Rightarrow a_1 = 100$$

کوچکترین زاویه

(۳): ۲۴

بچه ها! قبل از اینکه از تصاعد هندسی و غیریکنوا $3^{\log_4^a}$ ، k ، $2^{\log_4^a}$ مقدار k رو پیدا کنیم ، تصاعد رو تا حدامکان ساده می کنیم . یعنی :

$$a^{\log_4^2} , k , b^{\log_4^3} \Rightarrow \frac{1}{a^2}, k, \frac{1}{b^2} \Rightarrow \sqrt{a}, k, \sqrt{b} \xrightarrow{\text{K واسطه ی هندسی}} k^2 = \sqrt{a} \sqrt{b} \Rightarrow k^2 = \sqrt{ab}$$

$$\text{از اونجایی که } a \text{ و } b \text{ ریشه های معادله ی } x^2 + 13x + 16 = 0 \text{ هست ، پس : } a \cdot b = 16 \Rightarrow k^2 = \sqrt{16} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$$

چون این تصاعد ، غیر یکنواست ، پس : $k = -2$ (چرا؟)

(۲): ۲۵

با توجه به دنباله ی هندسی $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ میشه گفت :

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \cdot 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5 \quad (1)$$

از طرفی گفته شده که a و b ریشه های معادله ی $mx^2 + (1-2m)x - 1 = 0$ هستن ، پس میشه جمع ریشه ها رو به صورت زیر محاسبه کرد :

$$a+b = -\frac{1-2m}{m} \xrightarrow{\text{باتوجه به (1)}} 5 = \frac{2m-1}{m} \Rightarrow 5m = 2m-1 \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

(۴): ۲۶

برای اینکه ببینیم معادله ی $4x^2 - 4\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n}x + n\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n} = 0$ چند ریشه داره ، بهتره بریم سراغ Δ' :

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n})^2 - 4(n\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}) = 4(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - 4n\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

$$\Rightarrow \Delta' = 4n \left(\underbrace{\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}}_{\text{میانگین حسابی دنباله ی } a_n} - \underbrace{\sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}}_{\text{میانگین هندسی دنباله ی } a_n} \right)$$

عزیزان من ! حتماً میدونید که در یک دنباله با جملات مثبت ، همیشه : میانگین هندسی $\geq$ میانگین حسابی . بنابراین : $\Delta' \geq 0$. پس این معادله یا یک ریشه داره یا دو ریشه .

(۱): ۲۷

از تصاعد حسابی و نزولی $\log_{\frac{1}{2}} a, \log_{\frac{1}{2}} b, \log_{\frac{1}{2}} c$ میشه فهمید که :

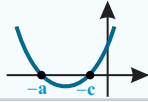
$$\xrightarrow{\log_{\frac{1}{2}} \text{ واسطه ی حسابیه}} 2 \log_{\frac{1}{2}} b = \log_{\frac{1}{2}} a + \log_{\frac{1}{2}} c \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} b^2 = \log_{\frac{1}{2}} ac \Rightarrow b^2 = ac \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{دنباله نزولیه}} \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b > \log_{\frac{1}{2}} c \xrightarrow{\text{مینا بین صفر و یک}} a < b < c \xrightarrow{\text{باتوجه به دامنه ی } \log} 0 < a < b < c \quad (2)$$

از طرفی مسئله، نمودار تابع $y = x^2 + (a+c)x + b^2$ رو می خواد. پس باید ضابطه ی تابع رو طوری ساده کنیم تا قابل رسم بشه:

$y = x^2 + (a+c)x + b^2 \xrightarrow{\text{باتوجه به ۱}} y = x^2 + (a+c)x + a.c \xrightarrow{\text{اتحاد جمله ی مشترک}} y = (x+a)(x+c)$

ریشه های این تابع هستن. با توجه به رابطه ی ۲ ($0 < a < c$) همیشه گفت که ($-a < -c < 0$). پس نمودار به شکل زیره:



۲۸: (۴) با توجه به خواسته ی مسئله، باید از دنباله ی عددی $0, 4, 8, \dots$ جملات نهم و پانزدهم رو پیدا کنیم و واسطه ی هندسی

بین a_9 و a_{15} رو بدست بیاریم:

$$0, 4, 8, \dots \xrightarrow{a_1 = 0, d = 4} \begin{cases} a_9 = a_1 + 8d = 32 \\ a_{15} = a_1 + 14d = 56 \end{cases} \Rightarrow \text{واسطه ی هندسی ۳۲ و ۵۶} = \sqrt{32 \times 56} = 16\sqrt{7}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $2^5 \quad 2^3 \times 7$

۲۹: (۴) بچه ها! آیا تا به حال به این موضوع فکر کردید که:

«اگر بین دو دنباله ی هندسی با قدر نسبت های یکسان، عمل جبری (+, -, ×, ÷) انجام بدید، دنباله ی جدید (در صورت وجود) یک دنباله ی هندسی خواهد بود؟»

بررسی الف) دنباله ی $(a_1 + 1), (a_2 - 3), (a_3 + 9)$ یک دنباله ی هندسیه، چون از جمع دو دنباله ی $\{a_1, a_2, a_3\}$ تشکیل شده که قدر نسبت هاشون یکسان هستن.

بررسی ب) دنباله ی $(a_1 - 2), (a_2 + 6), (a_3 - 18)$ یک دنباله ی هندسیه، چون از جمع دو دنباله ی $\{a_1, a_2, a_3\}$ تشکیل شده که قدر نسبت هاشون یکسان هستن.

بررسی ج) دنباله ی $(a_1^2 + 1), (a_2^2 + 9), (a_3^2 + 81)$ یک دنباله ی هندسیه، چون از جمع دو دنباله ی $\{a_1^2, a_2^2, a_3^2\}$ تشکیل شده که قدر نسبت هاشون با هم برابرن.

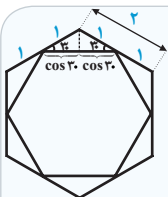
۳۰: (۲)

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -18 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 36 \end{cases} \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = -18 \\ a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1+q+q^2) = -18 \quad (1) \\ a_1q(1+q+q^2) = 36 \quad (2) \end{cases}$$

باتوجه به ۱ به ۲ تقسیم $\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{-1}{2} \Rightarrow q = -2$ باتوجه به ۱ $\Rightarrow a_1(1+(-2)+(-2)^2) = -18 \Rightarrow a_1 = -6$

خواسته مسئله: $a_3 - a_4 + a_5 = a_1q^2 - a_1q^3 + a_1q^4 = a_1q^2(1-q+q^2) = (-6)(4)(1+2+4) = -168$

۳۱: (۴)



محیط اولین ۶ ضلعی $\Rightarrow a_1 = 6(2) = 12$

محیط دومین ۶ ضلعی $\Rightarrow a_2 = 12 \cos 30^\circ$

اگر وسطهای اضلاع هر ۶ ضلعی منتظم رو به هم وصل کنیم و این کار رو متوالیاً تکرار کنیم، محیطهای بدست اومده، یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت $\cos 30^\circ$ رو تشکیل میده:

$$a_1, a_2, \dots \Rightarrow 12, 12 \cos 30^\circ, \dots \xrightarrow{a_1 = 12 \text{ و } q = \frac{\sqrt{3}}{2}} a_6 = a_1 q^5 = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = \frac{81}{16}$$

۳۲: (۳)

داده ی مسئله: دنباله ی هندسی $a_1, a_2, 16$ مفروضه. (این دنباله یکنواست) یعنی: $q > 0$

خواسته ی مسئله: در دنباله ی حسابی $16, ?, a_1$ با قدر نسبت ۶، مقدار؟ چقدر از a_2 بیشتره؟

* ابتدا از دنباله ی حسابی $16, ?, a_1$ با قدر نسبت ۶، مقدار؟ و a_1 رو پیدا می کنیم:

* حالا که مقدار a_1 پیدا شد، میرم سراغ دنباله ی هندسی $a_1, a_2, 16$ و مقدار قدر نسبت a_2 رو بدست میارم:

$$16, a_2, a_1 \xrightarrow{\times q} 4, a_2, 16 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{\text{باتوجه به ۱}} q = +2 \Rightarrow a_2 = 8$$

همونطور که می بینید مقدار؟ از a_2 به اندازه ی ۲ واحد، بیشتره.

$$\log(2x+3) = 2\log\sqrt{2} \Rightarrow \log(2x+3) = \log 2 \Rightarrow 2x+3=2 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

(۲): ۳۳

$$\textcircled{1} \quad q = -\frac{1}{2}$$

از اونجایی که جواب این معادله، قدر نسبت دنباله ی هندسی a_n هست. پس: $q = -\frac{1}{2}$ از طرفی گفته شده که جمله ی پنجم این دنباله برابره با $\frac{-1}{16}$ ، پس:

$$a_5 = \frac{-1}{16} \Rightarrow a_1 q^4 = \frac{-1}{16} \xrightarrow{\text{باتوجه به } \textcircled{1}} a_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{-1}{16} \Rightarrow \boxed{a_1 = -1} \textcircled{2}$$

$$S_F = a_1 \frac{1-q^F}{1-q} \xrightarrow{\text{باتوجه به } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2}} S_F = (-1) \times \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{15}{16} \times \frac{2}{3} = -\frac{5}{8}$$

خواسته مسئله

۳۴: (۱) دنباله ی هندسی و غیر یکنوا $4, a, 9, b, \dots$

$$a^2 = 4 \times 9 \Rightarrow a = \pm 6 \xrightarrow{\text{تصادف غیر یکنواست}} a = -6 \xrightarrow{\text{دنباله}} 4, -6, 9, \dots \xrightarrow{\text{باتوجه به } a_1 = 4 \text{ و } q = -\frac{3}{2}} q = -\frac{3}{2}$$

$$S_F = a_1 \frac{1-q^F}{1-q} = 4 \times \frac{1 - \left(-\frac{3}{2}\right)^6}{1 + \frac{3}{2}} = 4 \times \frac{1 - \frac{729}{64}}{\frac{5}{2}} = \frac{-133}{22}$$

خواسته مسئله

$$a_1, a_5, \dots \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} a_5 = a_1 q^4 \Rightarrow \frac{1}{2} = 2 \times q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{دنباله غیر یکنوا}} \boxed{q = -\frac{\sqrt{2}}{2}} \textcircled{1}$$

$$(2+\sqrt{2}) \times S_F = (2+\sqrt{2}) \times a_1 \frac{1-q^F}{1-q} = (2+\sqrt{2}) \times 2 \times \frac{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = (2+\sqrt{2}) \times 2 \times \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} = \frac{7}{2}$$

خواسته مسئله

$$1, \square, \square, A, \square, \square, 64 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2A = 1 + 64 \Rightarrow \boxed{A = 32.5}$$

(۱): ۳۶

$$1, \square, \square, B, \square, \square, 64 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} B^2 = 1 \times 64 \Rightarrow \boxed{B = \pm 8}$$

گزینه ی ۱ صحیحه $\xrightarrow{\text{باتوجه به گزینه ها}} A+B = 40.5 \text{ یا } A+B = 24.5$

۳۷: (۴) چون دنباله ی هندسی a_n غیر یکنواست پس $q < 0$ از طرفی حد مجموع جملات، مقداری مثبت است. پس:

$$\frac{a_1}{1-q} > 0 \xrightarrow{q < 0} \frac{a_1}{1-q} > 0 \Rightarrow \boxed{a_1 > 0} \textcircled{2}$$

با توجه به $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$ می توانیم علامت سه جمله ی اول دنباله ی هندسی a_n رو مشخص کنیم: $a_1, a_2, a_3, \dots$

اما خواسته ی مسئله، رسم نمودار تابع $y = a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3$ هست. به همین منظور، اول میریم سراغ Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4a_2^2 - 4a_1 a_3 \xrightarrow{\text{در تصاعد هندسی داریم}} a_2 a_3 = a_1^2 \Rightarrow 4a_2^2 - 4a_1 a_3 \Rightarrow \Delta = 0$$

حالا که فهمیدیم $\Delta = 0$ پس نمودار تابع بر محور x ها مماسه. با توجه به اینکه $a_1 > 0$ پس دستهای نمودار رو به بالاست.

اما سوال اینه که نمودار تابع $y = a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3$ در کجا به محور x ها مماس میشه؟

اگه وضعیت ریشه ی این تابع رو مشخص کنیم، همه چی حله:

$$\text{ریشه ی تابع} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2a_2)}{2(a_1)} = \frac{-a_2}{a_1} \xrightarrow{\text{نمودار}} \text{ریشه ی تابع} > 0$$


$$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \dots) \Rightarrow 2a_1 = \frac{a_2}{1-q} \Rightarrow 2 \cancel{a_1} = \frac{\cancel{a_1} q}{1-q} \Rightarrow 2 - 2q = q \Rightarrow \boxed{q = \frac{2}{3}} \textcircled{1}$$

(۲): ۳۸

$$a_5 = \frac{a_1 q^4}{a_1 q} = q^3 \xrightarrow{\text{باتوجه به } \textcircled{1}} \frac{8}{27}$$

خواسته مسئله

(۲): ۳۹

$$a_1 + a_2 + \dots = f(a_2 + a_3 + \dots) \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = f \times \frac{a_2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{a_1}{(1-q)} = \frac{f \times a_1 q}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow$$

جمله ی اول
قدر نسبت = q

جمله ی اول
قدر نسبت = q^۲

$$\frac{fq}{1+q} = 1 \Rightarrow fq = 1+q \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

(۳): ۴۰

a_n و جمله ی عمومی دنباله ی حسابی و b_n و جمله ی عمومی دنباله ی هندسی در نظر میگیریم. با توجه به متن مسئله:

تصادد هندسی: b_1 و b_2 و b_3 $\xrightarrow{\text{واسطه ی هندسیه}} b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ باتوجه به (۱) و (۲) و (۳)

$b_1 = a_1$ (۱) $b_2 = a_1 + a_2$ (۲) $b_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ (۳)

$$(a_1 + a_2)^2 = a_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \Rightarrow (2a_1 + d)^2 = a_1 \times \frac{f}{f} (2a_1 + 3d) \Rightarrow \cancel{fa_1^2} + fa_1d + d^2 = \cancel{fa_1^2} + fa_1d \Rightarrow d^2 = 2a_1d \Rightarrow d = 2a_1$$
 (۴)

خواسته مسئله: $\text{قدر نسبت دنباله ی هندسی} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{2a_1 + d}{a_1} = \frac{2a_1 + 2a_1}{a_1} = 4$ باتوجه به (۴) و (۱) و (۲)

(۲): ۴۱

فرض می کنیم m تا واسطه ی هندسی بین ۲ و ۵۰ درج شده. پس تصاعد هندسی ما دارای $(m+2)$ تا جمله هست:

$2, \dots, \dots, 50$
 $\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $a_1 \quad \quad \quad a_{m+2}$

طبق گفته ی مسئله، حاصلضرب $(m+2)$ تا جمله از ۱۰^۶ بیشتره. یعنی:

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{m+1} \times a_{m+2} > 10^6 \xrightarrow{\text{باتوجه به قانون حاصلضرب جملات یک تصاعد هندسی}} (a_1 a_{m+2})^{\frac{m+2}{2}} > 10^6$$

$$a_1 = 2 \text{ و } a_{m+2} = 50 \Rightarrow \frac{m+2}{2} > 10^6 \Rightarrow 10^{m+2} > 10^6 \Rightarrow m+2 > 6 \Rightarrow m > 4 \Rightarrow m \geq 5$$

پس باید حداقل ۵ واسطه ی هندسی بین ۲ و ۵۰ درج کنیم تا حاصلضرب جملات ایجاد شده، از ۱۰^۶ بیشتر باشه.

(۳): ۴۲

بچه ها! اگره یادتون باشه (که مطمئنم یادتون هست) در قسمت آموزش گفتم که اگره جملات a_m, a_n, a_p از یک دنباله ی حسابی، سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشه، اون موقع قدر نسبت دنباله ی هندسی برابر میشه با: $q = \frac{p-n}{n-m}$ با توجه به متن سوال، از دنباله ی حسابی $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ جملات سوم، هفتم و نهم رو انتخاب کردیم و در کنار هم قرار دادیم، بطوریکه جملات

$$a_3, a_7, a_9 \text{ و } a_4, a_5, a_6 \text{ و } a_1, a_2, a_8 \text{ تشکیل یک دنباله هندسی رو دادن. پس قدر نسبت این دنباله ی هندسی برابره با: } q = \frac{9-7}{7-3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = q \Rightarrow \frac{a_7}{a_3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a_1 + 24d = a_1 + 2d \Rightarrow 3a_1 + 22d = 0 \Rightarrow a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_{11} = 0$$
 خواسته مسئله:

(۱): ۴۳

با توجه به سوال، در دنباله ی هندسی (a, b, c) بین a و b دو جمله و بین b و c پنج جمله درج کردیم تا ده جمله ی ایجاد

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$
 $\boxed{a}, k_1, k_2, \boxed{b}, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, \boxed{c}$
دنباله حسابی

شده، یک دنباله ی حسابی رو بوجود بیارن. یعنی:

و حالا به دنبال قدر نسبت تصاعد هندسی (a, b, c) هستیم.

اگره یه کم دقتتون رو ببرید بالا می بینید که میشه این سوال رو به یه شکل دیگه هم مطرح کرد:

«جملات اول، چهارم و دهم یک دنباله ی حسابی، به ترتیب ۳ جمله از یک دنباله ی هندسی می باشند، قدر نسبت تصاعد هندسی چیست؟»

$$\begin{matrix} \times q & \times q \\ \swarrow & \searrow \\ a_1 & a_4 & a_{10} \end{matrix} \Rightarrow q = \frac{10-4}{4-1} = 2$$

آزمون فصل (۸)

۱ اگر $a+3b$ و $b+1$ و $2a-b$ و $a-2$ جملات متوالی یک دنباله ی حسابی باشند ، قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{7}{3}$

۲ در یک تصاعد عددی مجموع جملات اول ، دوم و سوم برابر ۱۲ و مجموع جملات هفتم ، هشتم و نهم برابر ۴۸ است . قدر نسبت

(آزاد - ۸۷)

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۳ اگر در یک دنباله ی حسابی ، جمله ی سوم دو برابر جمله ی هفتم باشد ، جمله ی نهم چند برابر جمله ی دهم است ؟

- (۱) ۲ (۲) $1/5$ (۳) ۳ (۴) نمی توان نظر داد (سر گروه گلستان)

(آموزش و پرورش - ۸۷)

۴ دنباله ی حسابی $-137, \dots, -11, -4, 3$ چند جمله ی منفی دارد ؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۵ دنباله ی عددی $\{1, 4, 7, \dots\}$ و $\{-2, 2, 6, \dots\}$ چند جمله ی مشترک ۳ رقمی دارند ؟

- (۱) ۷۳ (۲) ۷۴ (۳) ۷۵ (۴) ۷۶

۶ مجموع ۸ جمله ی اول یک دنباله ی حسابی برابر ۲ و جمله ی یازدهم آن برابر ۱۰ می باشد . قدر نسبت این دنباله کدام است ؟

(سراسری - ۷۹)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{5}{2}$

۷ در دنباله ی عددی $\dots, (2p-1), (p+1)$ مجموع ۱۰ جمله ی اول برابر ۸۵ می باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸ مجموع n جمله ی اول از دنباله ی عددی $3, 9, 15, \dots$ با جمله ی چهارم و یکم آن برابر است . n کدام است ؟

(استاد رمیب زاده (سر گروه فارس)

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

(سراسری-۸۸)

۹ در یک تصاعد عددی، جمله ی هفتم نصف جمله ی سوم است . مجموع چند جمله ی اول از این تصاعد برابر صفر است ؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴) ۲۱

۱۰ در یک دنباله ی عددی با جمله ی اول a ، اگر یک واحد به قدر نسبت جملات افزوده شود ، به مجموع ۲۰ جمله ی اول چقدر

(سراسری-۸۳)

افزوده خواهد شد ؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

۱۱ در یک دنباله ی عددی رابطه ی $32 = a_{13} + a_{19} + a_{23} + a_{27}$ برقرار است . مجموع ۲۷ جمله ی اول این دنباله چیست ؟

(استاد فائز کریمیان (قم)

- (۱) ۱۹۶ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۰۸ (۴) ۲۱۶

۱۲ در یک دنباله ی حسابی با جمله ی عمومی $a_n = \frac{2n+1}{3}$ مجموع پنج جمله ی دوم دنباله کدام است ؟

- (۱) $\frac{151}{6}$ (۲) $\frac{83}{3}$ (۳) $\frac{155}{6}$ (۴) $\frac{85}{3}$ (استاد مومنی (عضو گروه ریاضی کرمان)

۱۳ در یک تصاعد حسابی $a_1 = 3 + \sqrt{2}$ و $a_7 = 5 + \sqrt{2}$ می باشد. مجموع چهار جمله ی چهارم این تصاعد چقدر از مجموع چهار جمله ی

(آزاد-۸۸)

دومش بیشتر است ؟

- (۱) ۸ (۲) ۶۴ (۳) ۱۶ (۴) ۳۲

۱۴ در یک تصاعد عددی، مجموع چهار جمله ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله ی بعدی ۳۰ می باشد . جمله ی یازدهم این

(سراسری-۸۵)

تصاعد کدام است ؟

- (۱) $7/5$ (۲) ۸ (۳) $8/5$ (۴) ۹

(سنجش-۸۶)

۱۵ مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی عددی به صورت $\frac{n^2-3n}{3}$ می باشد . جمله ی نهم از جمله ی سوم چقدر بیشتر است ؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۸

۱۶ اگر واسطه ی هندسی ریشه های معادله ی $x^2 - 6x + 4 = 0$ نصف واسطه ی عددی ریشه های معادله ی $x^2 + (2m-1)x - 3 = 0$

دکتر سازگار (سر گروه مازندران)

باشد، مقدار m کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) $-\frac{7}{2}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) -۵

آزمون فصل (۸)

- ۱۷ به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه ی هندسی بین ریشه های حقیقی معادله ی $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است ؟
 (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳ (سراسری-۸۴)
- ۱۸ در دنباله ی هندسی با جمله ی عمومی a_n ، داریم $a_7 - a_1 = 6$ و $a_5 - a_1 = 30$. اگر این دنباله غیر یکنوا باشد، a_8 کدام است ؟
 (۱) ۱۲۸ (۲) -۱۲۸ (۳) ۲۵۶ (۴) -۲۵۶
- ۱۹ اگر جمله ی اول یک دنباله ی هندسی را ربع و قدر نسبت آنرا ۲ برابر کنیم، جمله ی هفتم چند برابر می شود ؟
 (۱) ۸ (۲) ۱۶ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴
- ۲۰ در یک دنباله ی هندسی، حاصلضرب سه جمله ی اول ۶۴ و مجموع آن ها ۶- است. قدر نسبت این دنباله کدام گزینه است ؟
 (۱) -۶ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) -۳
- ۲۱ مجموع چند جمله ی دنباله ی هندسی ...، ۲۴، -۱۲، ۶ برابر ۱۰۲۶ است ؟
 (۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۲ (آزاد-۸۰)
- ۲۲ در یک دنباله ی هندسی غیر ثابت، مجموع جمله ی سوم و ششم برابر ۱ و مجموع ۶ جمله ی اول ۳ می باشد. جمله ی اول چند برابر جمله ی ششم است ؟
 (۱) ۱۶ (۲) -۸ (۳) -۳۲ (۴) -۲۴۴
- ۲۳ بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، تصاعد هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است ؟
 (۱) $30(2 + \sqrt{2})$ (۲) $48\sqrt{2}$ (۳) $30(\sqrt{2} + 1)$ (۴) $36(\sqrt{2} + 1)$ (سراسری-۸۸)
- ۲۴ در یک دنباله ی هندسی مجموع ۵ جمله ی اول، ۲۴۳ برابر مجموع ۵ جمله ی دوم است. حد مجموع جملات این دنباله چند برابر جمله ی اول است ؟
 (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{4}$
- ۲۵ جملات سوم، ششم و پانزدهم یک دنباله ی عددی به ترتیب سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی اند. مجموع دو جمله ی اول دنباله ی عددی چند است ؟
 (۱) ۰ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۹