



استاد منتظری

مدیریت موسسه

MAG Harfeakhar .org
وبسایت رسمی موسسه حرف آخر

موسسه حرف آخر در سال ۱۳۹۰ با هدف ارائه جدیدترین تکنولوژی آموزش (پویا نمایی) کار خود را در زمینه آموزش دروس کنکور آغاز کرد.

آموزش فول انیمیشنی

تفاوت همینجاست

تدریس با استفاده از الگو به جای صدها تکنیک



01 جدیدترین جزوات و کتاب کار های برترین اساتید کشور در مجله حرف آخر

02 هر هفته انگیزشی ترین مقالات مشاوره ای در رادیو حرف آخر

03 جدید ترین فیلم های آموزشی در فیلم خانه حرف آخر

فصل ۱

حل معادلات

عامل یعنی چی؟

۱

۱

بچه‌ها! آیا می‌دونید تجزیه‌ی یک عبارت یعنی چی؟  آقا ابازده! این که کاری نداره.

تجزیه کردن یعنی تبدیل کردن یک عبارت به چند تیکه، طوری که بین هر دو تیکه‌ی دلفواه، علامت ضرب یا تقسیم وجود داشته باشه.

مثلاً عبارت $a^2 - b^2$ رو می‌تونیم به دو تیکه‌ی $(a-b)(a+b)$ تبدیل کنیم که بین‌شون علامت ضرب وجود داره؛

$$a^2 - b^2 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (a-b) \times (a+b)$$

آفرین. حالا از تون می‌خوام که عبارت‌های زیر رو تا اونجایی که جا داره تجزیه کنید.  آقا ابازده! به روی پشتم

$$1) x^3 - x \xrightarrow{\text{تجزیه}} x(x^2 - 1) \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \quad 2) \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \frac{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)}{(x) \cdot (x+3)}$$

بچه‌ها! در مثال‌های بالا به هر تیکه‌ی تجزیه شده، عامل یا فاکتور می‌گیم. مثلاً:

$$1) a^2 - b^2 = (\overset{\text{عامل}}{a-b}) \cdot (\overset{\text{عامل}}{a+b}) \quad 2) x^3 - x = (\overset{\text{عامل}}{x}) \cdot (\overset{\text{عامل}}{x-1}) \cdot (\overset{\text{عامل}}{x+1}) \quad 3) \frac{x^3 - 1}{x^2 + 3x} = \frac{(\overset{\text{عامل}}{x-1}) \cdot (\overset{\text{عامل}}{x^2 + x + 1})}{(\overset{\text{عامل}}{x}) \cdot (\overset{\text{عامل}}{x+3})}$$

آقا ابازده! پس آگه بین اجزای یک عبارت، جمع یا تفاضل وجود داشته باشه، اون اجزاء عامل نیستن. مگه نه؟ 

بله عزیزم، همین‌طور. مثلاً:

$$1) a^2 + b^2 \quad 2) a^2 - b^2 \quad 3) \frac{a^2 - b^2}{c + d}$$

اما $\frac{a^2 - b^2}{c + d}$ عامل

آقا ابازده! آگه در عبارت $\frac{a^2 - b^2}{c + d}$ ، صورت کسر، یعنی $a^2 - b^2$ ، رو توی یک جعبه و مخرج کسر یعنی $c + d$ ، رو توی یک جعبه‌ی

$$\frac{\overset{\text{عامل}}{a^2 - b^2}}{\overset{\text{عامل}}{c + d}}$$

دیگه قرار بدیم. آیا این دو جعبه عامل نمی‌شن؟ 

بله عزیزم هر کدوم از جعبه‌ها عامل میشن. چون بین‌شون عمل تقسیم وجود داره. یعنی:

آقا ابازده! آگه یک عبارت چندجمله‌ای قابل تجزیه نباشه، آیا معنیش اینه که اون عبارت هیچ عاملی نداره؟ 

نه عزیزم. هر عبارت چندجمله‌ای، حداقل دو تا عامل داره: خودش و ۱. مثلاً: $a^2 + b^2 = (\overset{\text{عامل}}{a^2 + b^2}) \times (\overset{\text{عامل}}{1})$

بچه‌ها! بحث‌هایی که بین من و شمارد و بدل شد بخاطر این بود که یک مطلب خیلی مهمی رو بهتون بگم. آگه به مطلبی که می‌خوام بگم خوب توجه کنید، دیگه مرتکب یکسری اشتباه‌های متداولی که خیلی از دانش‌آموزها دچارش هستن، نمی‌شید.

$$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$$

↓ ↓
عامل عامل

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

↓ ↓
غیر عامل غیر عامل

رادیکال تک تک عامل ها رو از هم جدا می کنه.

اما رادیکال قدرت جدا کردن غیر عاملها رو نداره.

(۱) رادیکال

استثناء: رادیکال با فرجه ی زوج نمیتونه حاصل ضرب دو عامل منفی رو از هم جدا کنه. مثلاً: $\sqrt{(-2)(-3)} \neq \sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$

$$(a \cdot b)^2 = (a^2) \cdot (b^2)$$

↓ ↓
عامل عامل

$$(a + b)^2 \neq (a^2) + (b^2)$$

↓ ↓
غیر عامل غیر عامل

توان تک تک عامل ها رو از هم جدا می کنه. مثلاً:

اما توان نمی تونه غیر عامل ها رو به صورت مستقیم از هم جدا کنه. نگاه کنید:

(۲) توان

$$\frac{a^2 \times b^2}{a^2 \times b^2} = 1 \times \frac{1}{b}$$

↓ ↓
عامل عامل

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \neq 1 + \frac{1}{b}$$

↓ ↓
غیر عامل غیر عامل

در عمل تقسیم میشه عامل های مشترک صورت و مخرج رو با هم ساده کرد. مثلاً: $a, b \neq 0$

اما نمی شه ، غیر عامل های مشترک رو با هم ساده نمود. مثلاً:

(۳) تقسیم

۲

جابه جایی عامل ها از یک طرف تساوی به طرف دیگر (طرفین وسطین ناقص)

۲

بچه ها! به معادله ی $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ توجه کنید. شما برای پیدا کردن x ، می تونید عامل های b و a رو از سمت چپ معادله و به صورت



$$\frac{ax}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{bc}{ad}$$

مورب (ضربدری)، به طرف راست معادله انتقال بدید. یعنی:

به این حرکت می گیم طرفین وسطین ناقص.

مثال معادله ی $\frac{x+1}{2} = \frac{8}{25(x+1)}$ چند جواب منفی دارد؟

$$\frac{x+1}{2} = \frac{8}{25(x+1)} \Rightarrow (x+1)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow x+1 = \pm \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{1}{5} \\ x+1 = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

معادله دو جواب منفی داره. پس گزینه ی «۳» صحیح است.

۳

(ب.م.م) و (ک.م.م)

۳

ب.م.م

بچه ها! آیا می دونید بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b یعنی چی؟ $(a, b \in \mathbb{N})$



آقا اجازه؟ ب.م.م دو عدد a و b یعنی بزرگترین عددی که a و b بهش بخش پذیرن.

مثلاً برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد ۲۴ و ۱۸ باید بزرگترین عددی رو پیدا کنیم که ۲۴ و ۱۸ بهوش بخش پذیر باشن. پس:
(۱) مقسوم‌علیه‌ها یا بپه‌های دو عدد ۲۴ و ۱۸ رو جداگونه می‌نویسیم:

$$۲۴ \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$۱۸ \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

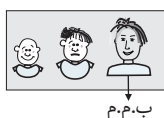
(۲) مشترک‌هاشون رو انتقاب می‌کنیم (یعنی مقسوم‌علیه‌های مشترک):

$$۱۸ \text{ و } ۲۴ \text{ مشترک مقسوم‌علیه‌های } = \{1, 2, 3, 6\}$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک ۱۸ و ۲۴

در واقع ۶ بزرگترین عددیه که ۲۴ و ۱۸ بهوش بخش پذیرن.

آقا اجازه؟! از اونایی که بپه‌های یک خانواده بخشی از پدر و مادرشون هستن، میشه گفت پدر مادر یک خانواده به بپه‌هاشون بخش پذیرن.



مقسوم علیه های مشترک



پس اگر a و b پدر و مادر یک خانواده باشن، بزرگترین بپه‌شون میشه ب.م.م. اونها.

آفرین به تو دانش آموز خوش فکر که سریع، مفاهیم ریاضی رو برای خودت شبیه‌سازی می‌کنی!
البته می‌تونستی اینطوری هم بگی: در بین نسل‌های مشترک دو نفر، به بزرگترینشون می‌گیم ب.م.م.

بچه‌ها! برای پیدا کردن ب.م.م دو عدد a و b روش سریعی وجود داره:

(۱) a و b رو به عامل‌های اول تجزیه کنید. (۲) عامل‌های مشترک با توان کمتر رو در هم ضرب کنید. (چرا؟)

$$\begin{cases} ۲۴ = ۲^3 \times 3^1 \\ ۱۸ = 2^1 \times 3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲۴, ۱۸) = 2^1 \times 3^1 = ۶$$

مثال ب.م.م دو عدد ۲۴ و ۱۸ را به دست آورید.

همونطور که می‌دونید، ب.م.م رو با نماد () نشون میدن.

اگر دو عدد a و b نسبت به هم اول باشن، معنی‌ش اینه که a و b بجز ۱ هیچ عامل مشترکی ندارن. پس $(a, b) = ۱$

اگر a به b بخش پذیر باشه، اون موقع $(a, b) = b$ بچه‌ها! فکر می‌کنید چرا؟

آقا اجازه؟! آیا قانونی وجود داره که بشه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد a رو به کمک اون بدست آورد؟



عزیزم! اگر در مثال زیر با من همکاری کنی با هم راهش رو پیدا می‌کنیم.



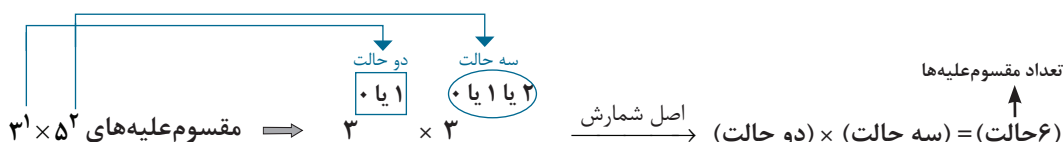
مثلاً می‌خوایم تعداد مقسوم‌های طبیعی عدد ۷۵ رو به دست بیاریم.

با توجه به اینکه $۷۵ = 3^1 \times 5^2$ آیا می‌تونم مقسوم‌علیه‌های ۷۵ رو به صورت $3^{\square} \times 5^{\bigcirc}$ بنویسم؟

آقا اجازه؟! در صورتی صرف شما درسته که داخل $\square$ توان‌های ۰ یا ۱ و داخل $\bigcirc$ توان‌های ۰ یا ۱ یا ۲ قرار بگیرن. یعنی:



$$۳^۱ \times ۵^۲ \text{ مقسوم‌علیه‌های } = \left\{ \underbrace{۳^۰ \times ۵^۰}_1, \underbrace{۳^۰ \times ۵^1}_5, \underbrace{۳^۰ \times ۵^2}_{25}, \underbrace{۳^1 \times ۵^0}_3, \underbrace{۳^1 \times ۵^1}_{15}, \underbrace{۳^1 \times ۵^2}_{75} \right\}$$



عزیزم، آیا می‌تونی مدلی درست کنی که $3^1 \times 5^2$ رو با تعداد مقسوم‌علیه‌هاش مرتبط کنه؟  آقا اجازه؟ فیلی راحته:

$$3^1 \times 5^2 = (3+1)(5+1) = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد}$$

آیا می‌تونی بگی که یه عدد طبیعی، بعد از تجزیه شدن به عامل‌های اول، اگه به شکل $m^\alpha \cdot n^\beta$ دربیاد، تعداد مقسوم‌علیه‌هاش چنداناست؟

$$(m^\alpha \cdot n^\beta \text{ عدد مقسوم‌علیه‌های عدد}) = (\alpha+1)(\beta+1)$$

آقا اجازه؟ به کمک مدل‌سازی بالا میشه گفت:

اگه یک عدد طبیعی بعد از تجزیه شدن به عامل‌های اول به صورت $m^\alpha \cdot n^\beta \cdot k^\gamma \dots$ دربیاد، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی برابر با: $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots$

مثال تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۶۰ را به دست آورید.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 \Rightarrow 360 \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

تمرین: تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک دو عدد ۳۰۰ و ۳۶۰ چیست؟

راهنمایی: ب‌م دو عدد ۳۶۰ و ۳۰۰ رو بدست بیارید. توجه داشته باشید که ب‌م دو عدد به تمام مقسوم‌علیه‌های مشترک اون دو عدد بخش پذیره.

ک.م.م

بچه‌ها! کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b یعنی: در بین اعدادی که هم به a هم به b بخش پذیرن، کوچکترینشون.

مثلاً برای پیدا کردن ک.م.م دو عدد ۴ و ۶ باید:

(۱) مضرب‌های (آبا و اجداد) دو عدد ۴ و ۶ رو جداگونه بنویسید.

$$\text{مضرب‌های } 6 = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$$

$$\text{مضرب‌های } 4 = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

(۲) مشترک هاشون رو انتخاب کنید (یعنی مضرب‌های مشترک):

$$\text{مضرب‌های مشترک دو عدد } 4 \text{ و } 6 = \{12, 24, 36, \dots\}$$

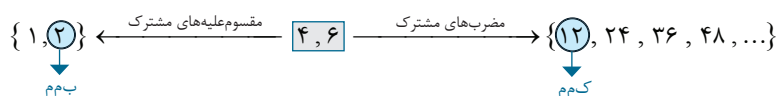
کوچکترین مضرب مشترک ۴ و ۶

در واقع ۱۲ کوچکترین عددیه که هم به ۶ و هم به ۴ بخش پذیره.

آقا اجازه؟ اگه a و b رو بچه‌های یک خانواده در نظر بگیریم، به کوچکترین سرپرست این بچه‌ها میگیم ک.م.م. اون‌ها.

کاملاً درسته عزیزم. میتونی اینطوری هم بگی: در بین اجداد مشترک دو نفر، به کوچکترین شون میگیم ک.م.م.

بچه‌ها! در مقایسه ی بین ک.م.م و ب.م.م دو عدد مختلف، کدام بزرگتره؟



آقا اجازه؟ ک.م.م بزرگتره. مثلاً:

بچه‌ها! برای پیدا کردن ک.م.م دو عدد a و b روش سریعی وجود داره:

(۱) a و b رو به عامل‌های اول تجزیه کنید. (۲) عامل‌های مشترک با توان بیشتر رو در عامل‌های غیرمشترک ضرب کنید. (چرا؟)

مثال کمم دو عدد ۷۵ و ۹۰ را بدست آورید.

$$75 = 5^2 \times 3^1 \Rightarrow [75, 90] = 5^2 \times 3^2 \times 2^1 = 450$$

$$90 = 5^1 \times 3^2 \times 2^1$$

همونطور که می‌دونید، ک.م.م رو با نماد $[]$ نشون میدن.

اگه دو عدد a و b نسبت به هم اول باشن، اون موقع هیچ عامل مشترکی بین شون وجود نداره. پس: $[a, b] = a \cdot b$

اگه a به b بخش‌پذیر باشه، اون موقع $[a, b] = a$ (چرا؟)

کمم دو عدد کسری به صورت $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] = \frac{[a, c]}{(b, d)}$ محاسبه میشه. (شرط داشتن ک.م.م اینه که هر دو کسر، گویا و یا هر دو کسر، گنگ باشن)

مثال کمم دو عدد $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{2}$ چیست؟

$$\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right] = \frac{[2, 3]}{(3, 2)} = \frac{6}{1} = 6$$



کمم و ب.م.م چند جمله‌ای‌ها

بچه‌ها! پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م دو چند جمله‌ای، مثل پیدا کردن ب.م.م و ک.م.م دوعدهده.



مثال ب.م.م و کمم دو عبارت $(x^4 - x^2)$ و $(x^3 - 2x^2 + x)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1) \\ x^3 - 2x^2 + x = x^1(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ب.م.م} = x(x-1) \\ \text{کمم} = x^2(x-1)^2(x+1) \end{cases}$$

۴

کاربرد (ب.م.م) و (ک.م.م) در مسائل روزمره

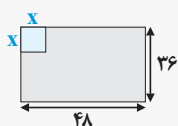
۴

بچه‌ها! بدون هیچ توضیحی می‌خوام برم سراغ چند مثال کاربردی:



مثال می‌خواهیم کف سالتی مستطیل شکل به ابعاد 48×36 متر را با فرش‌های مربع شکل یکسان بطور کامل بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع هر تخته

فرش چند متر باشد تا کمترین تعداد فرش مورد استفاده قرار گیرد؟ (اندازه‌ی هر ضلع فرش عددی طبیعی بر حسب متر می‌باشد).



بچه‌ها! اگه x اندازه‌ی هر ضلع فرش باشد، برای اینکه کل سالن پوشیده بشه، باید ۴۸ و ۳۶

به x بخش‌پذیر باشن. به عبارت دیگه x باید مقسوم‌علیه مشترک ۴۸ و ۳۶ باشد. حالا اگه

بخوایم کمترین تعداد فرش رو مورد استفاده قرار بدیم، باید x به بزرگترین مقدارش برسه.

نتیجه اینکه x باید ب.م.م دو عدد ۴۸ و ۳۶ باشد.

$$48 = 2^4 \times 3^1 \Rightarrow (48, 36) = 2^2 \times 3^1 = 12$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

پس کافیه که فرشهای 12×12 انتخاب کنیم تا کل سالن با کمترین تعداد فرش پوشیده بشه.

بچه‌ها! در مثال قبل به چند طریق میشه کل سالن رو با فرش‌های مربع شکل پوشش داد؟



آقا اجازه؟ می‌دونیم اندازه‌ی ضلع این فرش‌ها باید مقسوم‌علیه مشترک اعداد ۳۶ و ۴۸ باشه تا بشه سالن رو باهاشون پوشونر.

پس تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک ۴۸ و ۳۶ همون تعداد حالت‌هاییه که سؤال، از ما خواسته:

$$48 \text{ و } 36 \text{ مشترک} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

بنابراین با فرش‌های 1×1 ، 2×2 ، ...، 12×12 میشه سالن رو پوشوند. (یعنی به ۶ طریق)

روش ۲: بچه‌ها! همونطور که می‌دونید تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک ۴۸ و ۳۶ با تعداد مقسوم‌علیه‌های ب.م.م اونها (یعنی ۱۲)



برابره. پس:

$$48 \text{ و } 36 \text{ مشترک} = \frac{48 \times 36}{12} = 144$$

$$= (12+1)(1+1) = 6$$

مثال چند دقیقه‌ی قبل، دو ماشین A و B از تهران روانه شدند و الان در یک مسیر به سمت بندرعباس در حال حرکتند. اگر از لحظه‌ی شروع حرکت، ماشین A هر ۲۵ کیلومتر یک بار و ماشین B هر ۶۰ کیلومتر یکبار توقف نماید، با فرض اینکه فاصله‌ی تهران تا بندرعباس ۱۰۰۰ کیلومتر باشد، اولین نقطه‌ای که محل مشترک توقف هر دو ماشین می‌باشد تا بندرعباس چند کیلومتر فاصله دارد؟



بچه‌ها! همونطور که می‌بینید نقاط توقف ماشین A مضربی از ۲۵ و نقاط توقف ماشین B مضربی از ۶۰ هست. پس نقاط مشترک توقف هر دو ماشین، باید مضرب مشترک ۲۵ و ۶۰ بشه. بنابراین اولین نقطه‌ی مشترک توقف، میشه کم‌م ۲۵ و ۶۰:

$$\begin{cases} 60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \\ 25 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow [60, 25] = 5^2 \times 2^2 \times 3^1 = 300$$

پس ۳۰۰ کیلومتر بعد از تهران و یا ۷۰۰ کیلومتر مانده به بندرعباس میشه اولین نقطه‌ی مشترک توقف هر دو ماشین.

حل معادلات به کمک حذف عامل‌های مشترک از دو طرف (روشی سریع اما خطرناک)

مثال آموزشی: بچه‌ها! می‌خوام معادله‌ی $(x^2 - 1)x^2 = 9(x^2 - 1)$ رو با دو روش براتون حل کنم. **روش کُند:** یه طرف تساوی رو به طرف دیگه انتقال میدم و از عامل‌های مشترک فاکتور می‌گیرم، بعدش معادله‌ی تجزیه شده رو حل می‌کنم:

$$(x^2 - 1)x^2 = 9(x^2 - 1) \Rightarrow (x^2 - 1)x^2 - 9(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

روش سریع: عامل‌های مشترک رو از دو طرف معادله حذف کرده و معادله‌ی ساده شده رو حل می‌کنم:

$$(x^2 - 1)x^2 = 9(x^2 - 1) \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

بچه‌ها، مثل این که تو روش سریع، اتفاق بدی افتاده. همون‌طور که می‌بینید دو تا از جواب‌های معادله، یعنی $x = \pm 1$ غیبشون زده. فکر

می‌کنید علتش چیه؟ **آقا اجازه؟! فیلی واضحه، دلیلش اینکه عامل‌های مشترک $(x^2 - 1)$ رو از دو طرف معادله حذف کردید، اما به این موضوع فکر**

نشره که ریشه‌های $(x^2 - 1)$ قسمت دیگه‌ای از جواب معادله هستن.

بچه‌ها! ببخشید. حالا می‌آم و اشتباهم رو جبران می‌کنم:

$$(x^2 - 1)x^2 = 9(x^2 - 1) \xrightarrow{x^2 - 1 = 0} x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب داره}$$

بچه‌ها! یه سؤال: نظرتون راجع به جواب‌های معادله‌ی $\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{9}{x^2 - 1}$ چیه؟

آقا اجازه؟! تفاوت این معادله با معادله قبلی اینه که تو معادله قبلی $x^2 - 1$ در صورت کسر بود ولی در این معادله $x^2 - 1$ در مخرج.

در این معادله ما حق نداریم $x^2 - 1$ رو مساوی صفر قرار بدیم، چون مخرج صفر میشه و معادله اصلاً تعریف نمی‌شه. پس با شرط

$x^2 - 1 \neq 0$ عامل‌های مشترک $x^2 - 1$ رو از مخرج حذف کرده و معادله‌ی ساده شده رو حل می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{9}{x^2 - 1} \xrightarrow{x^2 - 1 \neq 0} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \text{معادله دو جواب داره}$$

$$\cancel{f(x)} \cdot g(x) = \cancel{f(x)} \cdot h(x) \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{یا} \quad g(x) = h(x) \Rightarrow \text{اجتماع جواب‌ها}$$

$$\frac{\cancel{g(x)}}{\cancel{f(x)}} = \frac{h(x)}{\cancel{f(x)}} \Rightarrow f(x) \neq 0 \quad \text{و} \quad g(x) = h(x) \Rightarrow \text{اشتراک جواب‌ها}$$

مثال معادله $(x-1)(2x+3) = (x-1)^2$ چند جواب دارد؟ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\begin{aligned} (x-1)(2x+3) &= (x-1)^2 \xrightarrow{x-1 \neq 0} 2x+3 = x-1 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow \text{معادله ۲ جواب دارد} \\ \text{روش سریع: } (x-1)(2x+3) &= (x-1)(x-1) \end{aligned}$$

مثال معادله $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ چند جواب دارد؟ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2} \xrightarrow{x-2 \neq 0} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

با توجه به این که x نمی‌تونه ۲ باشه پس در بین جواب‌های $x = \pm 2$ فقط $x = -2$ قابل قبوله در نتیجه معادله یک جواب داره.

۶

حل معادلات درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$

۶

بچه‌ها! روش‌های مختلفی برای حل معادلات درجه‌ی دوم وجود داره که چند تارو با هم بررسی می‌کنیم:



می‌دونید که در یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ با کمک $\Delta = b^2 - 4ac$ میشه ریشه‌های معادله رو بدست آورد:

روش Δ

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال در معادله $2x^2 - 5x + 2 = 0$ فاصله‌ی بین کوچکترین و بزرگترین ریشه چیست؟

$$x(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\Delta = 25 - 16} x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

کوچکترین ریشه، $x = 0$ و بزرگترین ریشه، $x = 2$ هست. پس فاصله‌ی بین این دو ریشه برابره با ۲.

روش Δ'

بچه‌ها! در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر b زوج باشه میتونید از $b' = \frac{b}{2}$ استفاده کرده و ریشه‌های معادله رو به صورت زیر بدست بیارید:



$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{\Delta' = b'^2 - ac} x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

مثال جواب‌های معادله $3x^2 - 18x + 2 = 0$ را به دست آورید.



آقا اجازه؟ با توجه به اینکه از روش Δ یه کمی محاسبات، سنگین میشه، بهتره که از روش Δ' استفاده کنیم. ($b' = -9$)

$$\Delta' = b'^2 - ac \Rightarrow \Delta' = 81 - 6 = 75$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{75}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



روش اتحاد جمله‌ی مشترک

ریشه‌های معادلات درجه دومی که ساختارشون به صورت $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ هست رو میشه به صورت زیر بدست آورد.

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow (x + \alpha)(x + \beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\alpha \\ x = -\beta \end{cases}$$

مثال ریشه‌های معادلات زیر را بدست آورید.

$$1) x^2 - 7x - 42 = 0 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-7) + (+6) \\ (-7) + (+6) \end{smallmatrix}} (x - 7)(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$2) 2x^2 - x - 10 = 0 \xrightarrow{\times 2} (2x)^2 - (2x) - 20 = 0 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-1) + (+4) \\ (-1) + (+4) \end{smallmatrix}} (2x - 5)(2x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$



روش ضرایب

A) بچه‌ها! همونطور که می‌دونید اگه در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب a ، b و c برابر صفر باشه یک



ریشه (۱) و ریشه‌ی دیگه $(\frac{c}{a})$ میشه.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

علت: $\begin{cases} ax^2 + bx + c \stackrel{x=1}{=} a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c \xrightarrow{a+b+c=0} 0 \\ ax^2 + bx + c \stackrel{x=\frac{c}{a}}{=} a(\frac{c}{a})^2 + b(\frac{c}{a}) + c = \frac{c^2}{a} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{a} = \frac{c(a+b+c)}{a} \xrightarrow{a+b+c=0} 0 \end{cases}$

B) از طرفی اگه مجموع ضرایب جملات اول و آخر برابر با ضریب وسط باشد، یک ریشه (-1) و ریشه‌ی دیگه $(-\frac{c}{a})$ میشه.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

یعنی:

توجه: برای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی n قانون زیر هواره برقراره.

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \text{(یکی از ریشه‌ها } x = 1 \text{ هست)}$$

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots = 0 \xrightarrow{\text{(مجموع ضرایب جملاتی که توان فرد دارن) = (مجموع ضرایب جملاتی که توان زوج دارن)}} \text{(یکی از ریشه‌ها } x = -1 \text{ هست)}$$

مثال ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$1) \sqrt{3}x^2 - x + 1 - \sqrt{3} = 0 \xrightarrow{(\sqrt{3}) + (-1) + (1 - \sqrt{3}) = 0} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \end{cases}$$

$$2) 6x^2 - 19x - 25 = 0 \xrightarrow{(6) + (-25) = -19} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{-25}{6} = \frac{25}{6} \end{cases}$$

مثال معادله‌ی $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ چند ریشه‌ی منفی دارد؟

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \xrightarrow{(-1)+(-2)+(-5)+(6)=0} \begin{cases} x=1 \\ ? \end{cases} \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(?)$$

اگر $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ رو به $x-1$ تقسیم کنیم، قسمت دوم عبارت تجزیه شده، مشخص میشه.

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ x^3 - x^2 - 6x + 6 \\ \hline -x^2 - 5x + 6 \\ -x^2 + x \\ \hline -6x + 6 \\ -6x + 6 \\ \hline -12x + 12 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6) = (x-1)(x-3)(x+2)$$

$$-x^2 - 5x + 6$$

$$-x^2 + x$$

$$-6x + 6$$

$$-6x + 6$$

$$-12x + 12$$

همونطور که می‌بینید معادله‌ی $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ سه ریشه داره ($x=1$, $x=3$, $x=-2$) که یکی شون منفیه.

۷

حل معادلات مرکب

۷

مثال آموزشی: معادله‌ی $\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{2x-1}\right) + 4 = 0$ رو حل کنید.

بچه‌ها! معادله‌ی بالا معادله‌ایست با ظاهری درجه‌ی ۲، اما نه بر حسب x ، بلکه بر حسب $\left(\frac{x}{2x-1}\right)$.



حل معادله‌ی بالا در دو مرحله صورت می‌گیره:

(۱) عبارت $\left(\frac{x}{2x-1}\right)$ رو درون جعبه‌ای به نام X قرار می‌دیم و معادله رو به صورت $X^2 + 5X + 4 = 0$ می‌نویسیم. از حل این معادله مقادیر X پیدا میشه.

$$X^2 + 5X + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = -1 \\ X = -4 \end{cases}$$

(۲) در واقع با معلوم شدن X ، مقدار $\left(\frac{x}{2x-1}\right)$ رو مشخص کردیم. پس میتونیم مقدار x رو پیدا کنیم.

$$\begin{cases} X = -1 \Rightarrow \frac{x}{2x-1} = -1 \Rightarrow x = -2x + 1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \\ X = -4 \Rightarrow \frac{x}{2x-1} = -4 \Rightarrow x = -8x + 4 \Rightarrow 9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9} \end{cases}$$

اول مقدار $g(x)$ رو پیدا کنید.

برای حل معادلات مرکب به فرم $f(g(x)) = 0$ بعدش با معلوم شدن $g(x)$ ، مقدار x رو به دست بیارید.

مثال در مورد معادله‌ی $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - 6 = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) ریشه‌ی مضاعف دارد. (۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۳) چهار ریشه دارد. (۴) دو ریشه دارد.

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - 6 = 0 \xrightarrow{\frac{x^2}{x^2+1} = X} X^2 + X - 6 = 0 \Rightarrow (X+3)(X-2) = 0$$

$$\begin{cases} X = -3 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = -3 \quad \text{(عبارت } \frac{x^2}{x^2+1} \text{ نامنفیه و نمی‌تونه -3 بشه)} \\ X = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2 = x^2 \Rightarrow x^2 = -2 \quad \text{(} x^2 \text{ نامنفیه و نمی‌تونه -2 بشه)} \end{cases}$$

بنابراین معادله‌ی بالا ریشه‌ی حقیقی نداره. پس گزینه‌ی «۲» صحیح است.

حل معادلات قدر مطلق

۸

۸

بچه‌ها! آیا می‌تونید معادله‌ی $|x| = 3$ رو به فارسی ترجمه کنید؟



آقا اجازه؟ بله. همه‌مون می‌دونیم که قدر مطلق، کارش مثبت کردنه. پس معنی معادله‌ی $|x| = 3$ اینه:



« x هایی رو به دست بیارید که وقتی مثبتشون کنیم، بشن ۳»



با توجه به این ترجمه، فقط ۳ یا -۳ میتونن جای x رو بگیرن. یعنی: $|x| = 3$

بچه‌ها! جواب معادله‌ی $|x| = -3$ چی میشه؟



آقا اجازه؟ $|x|$ مقدارش مثبته. پس نمی‌تونه با -۳ برابر بشه. یعنی این معادله جواب نداره.



$$|x| = a \xrightarrow{a \geq 0} x = \pm a$$

$$|x| = a \xrightarrow{a < 0} \text{معادله جواب نداره}$$

بچه‌ها! همیشه بگید جواب معادله‌ی $|x| = |a|$ چی میشه؟



آقا اجازه؟ کاملاً واضح که دو عدد x و a که با هم برابر و یا قرینه‌ی هم باشن، قدر مطلقشون با هم برابر میشه. مثلاً:



$$|2| = |2| \quad \text{یا} \quad |-2| = |-2| \quad \text{یا} \quad |-2| = |2|$$

پس همیشه گفت: «اگه $|x| = |a|$ باشه، اون موقع x و a یا با هم برابر و یا قرینه‌ی هم دیگه هستن.»

$$|x| = |a| \xrightarrow{\text{بی‌قید و شرط}} x = \pm a$$

مثال معادلات زیر را حل کنید.

$$1) |2x-1| = |3x| \xrightarrow{\text{شرط}} 3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{5} \end{cases} \begin{matrix} \text{چون با شرط، مطابقت نداره} \\ \text{چون با شرط، مطابقت داره} \end{matrix}$$

$$2) |2x-1| = |3x| \xrightarrow{\text{بی‌قید و شرط}} 2x-1 = \pm 3x \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{5} \end{cases} \begin{matrix} \text{(جواب)} \\ \text{(جواب)} \end{matrix}$$

$$3) \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = |2x+1| \Rightarrow \frac{|x+1|}{|x-1|} = |2x+1| \Rightarrow |x+1| = \frac{(x-1)(2x+1)}{2x^2-x-1} \Rightarrow 2x^2-x-1 = \pm(x+1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2-2x-2=0 \\ 2x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

هر سه مقدار بدست اومده، جواب این معادله هستن. چون در دامنه‌ی معادله اولیه (یعنی $\{1\} - R$) قرار دارن.

حل معادلات گویا

۹

۹

بچه‌ها! اگه می‌خواید یک معادله‌ی گویا رو حل کنید بهتره که مراحل زیر رو طی کنید:



- ۱) اگه معادلتون کسری بود، دو طرف معادله رو در مخرج مشترکشون یا کم‌مخرجها ضرب کنید تا به یک معادله‌ی بدون مخرج برسید.
- ۲) جواب معادله‌ی بدون مخرج رو به دست بیارید و در معادله‌ی اولیه (معادله‌ی کسری) چک کنید. اگه مقادیر به دست اومده در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار داشتن (یعنی در معادله‌ی اولیه صدق کردن) به عنوان جواب معادله محسوب می‌شن و در غیر این صورت خیر.

مثال معادله‌ی زیر چند جواب دارد؟

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4} \xrightarrow{\times(x^2-4)} (x-2)^2 + x(x+2) = 8 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{قق} \\ x = 2 & \text{غقق} \end{cases}$$

$x = -1$ در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار دارد پس جوابه.

$x = 2$ در دامنه‌ی معادله‌ی اولیه قرار ندارد پس جواب نیست.

۱۰

حل معادلات گنگ (از طریق به توان رساندن دو طرف معادله)

۱۰

بچه‌ها! بعضی از شماها برای حل یک معادله ممکنه دو طرف معادله رو به توان ۲ برسونید و از این طریق به جواب برسید. اما آیا به این موضوع فکر کردید که به توان زوج رسوندن یک معادله، ممکنه جواب‌های زائدی رو تولید کنه که در معادله‌ی اولیه صادق نباشه؟ اگه تا حالا به این موضوع فکر نکردید، پس به این مثال توجه کنید:

$$\sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{(\quad)^2} 5-4x = x^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$$

امتحان: $\begin{cases} \sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{x=1} 1=1 & \text{(قق)} \\ \sqrt{5-4x} = x \xrightarrow{x=-5} 5=-5 & \text{(غقق)} \end{cases}$

جواب معادله $x = 1$

اگه دو طرف معادله‌ای رو به توان زوج رسونید حتماً جواب‌های به دست اومده رو در معادله‌ی اولیه چک کنید. چون که ممکنه بعضی از جواب‌های به دست اومده، زائد باشن و در معادله‌ی اولیه صدق نکنن.

مثال معادله‌ی $x - 2\sqrt{x-1} = 0$:

(۱) یک ریشه‌ی ساده دارد. (۲) دو ریشه‌ی متمایز دارد. (۳) ریشه‌ی حقیقی ندارد. (۴) یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$x = 2\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان (۲)}} x^2 = 4(x-1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

حالا $x = 2$ را تو معادله امتحان می‌کنیم: (قق $2 = 2$) $\Rightarrow 2 = 2\sqrt{2-1}$ بنابراین معادله یک ریشه دارد.

در ضمن $x = 2$ از معادله‌ی $(x-2)^2 = 0$ به دست اومده. پس $x = 2$ ریشه‌ی مضاعفه !!!!

مثال در معادله‌ی $\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3$ تعداد ریشه‌ها کدامست؟ (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

$$\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} = 3 \xrightarrow{\text{توان (۲)}} \cancel{\sqrt{9 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}} = \cancel{3} \Rightarrow \sqrt{x(x^2 - 2x + 1)} = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

چون $x = 0$ و $x = 1$ در معادله‌ی اولیه صدق می‌کنن پس معادله دو ریشه دارد. $\Rightarrow$

۱۱

حل معادلات گنگ (به کمک دامنه)

۱۱

بچه‌ها! تو بعضی از معادلات، دامنه‌ی معادله تعداد عضوهای بسیار کمی داره. یعنی دامنه‌ی معادله، مجموعه‌ای یک عضوی یا چند عضویه. در این حالت شما می‌تونید هر یک از اعضای دامنه رو تو معادله قرار بدید، اگه تو معادله صدق کردن، به عنوان جواب در نظر بگیرید و در غیراینصورت خیر.

مثال معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x-2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ 2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \rightarrow D = \{2\} \xrightarrow{x=2 \text{ رو توی معادله قرار می‌دیم}} \sqrt{2} + \sqrt{2-2} = \sqrt{2-2} + \sqrt{2(2)-2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

بنابراین $x=2$ تنها جواب این معادله هست، چون در معادله‌ی اولیه صدق کرد.

۱۲

حل معادلات گویا و کنگ (به کمک برد)

۱۲

مثال آموزشی: تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x^2+9} = 3-x^4$ چیست؟

$$\begin{cases} x^2 \in [0, +\infty) \xrightarrow{+9} x^2+9 \in [9, +\infty) \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x^2+9} \in [3, +\infty) \\ x^4 \in [0, +\infty) \xrightarrow{\text{قرینه}} -x^4 \in (-\infty, 0] \xrightarrow{+3} 3-x^4 \in (-\infty, 3] \end{cases}$$

آقا اجازه؟ عبارت $\sqrt{x^2+9}$ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ و عبارت $3-x^4$ هم کوچک‌تر یا مساوی ۳ هست. پس امکان نداره

$\sqrt{x^2+9} = 3-x^4$ بشه. در نتیجه این معادله جواب نداره.

عزیزم اگه یه کم دقت رو بیش‌تر کنی می‌فهمی که این معادله جواب داره.

آقا اجازه؟ هواس‌مون نبود که برد $3-x^4$ و برد $\sqrt{x^2+9}$ در عدد ۳ مشترک هستن. پس معادله‌ی $\sqrt{x^2+9} = 3-x^4$ فقط در صورتی جواب داره که هر دو طرف تساوی برابر با ۳ بشه. یعنی:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+9} = 3 \Rightarrow x=0 \\ 3-x^4 = 3 \Rightarrow x=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=0 \text{ جواب این معادله هست.}$$

در حل معادله‌ی $f(x) = g(x)$ اگه f و g فقط در یک نقطه مانند L مشترک بودند، کافیه یکبار $f(x)$ و بار دیگه $g(x)$ رو مساوی L قرار بدید و جواب‌های این دو معادله رو به دست بیارید. اشتراک جواب‌های به دست اومده، جواب نهایی معادله‌ی $f(x) = g(x)$ خواهد بود.

۱۳

حل معادلاتی که در آن مجموع چند عبارت نامنفی برابر صفر می‌شود

۱۳

مثال آموزشی: معادله $|x-1| + \sqrt{x^2-1} + (2x-2)^2 = 0$ رو حل کنید.

بچه‌ها! این معادله از ۳ تا عبارت نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) تشکیل شده که جمع‌شون برابر صفره. این تساوی امکان

نداره مگر این‌که هر سه عبارت با هم صفر بشن. یعنی:

$$\begin{cases} |x-1| = 0 \Rightarrow x=1 \\ \sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ (2x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x=1$$

بچه‌ها! فکر می‌کنید چرا از جواب‌های پیدا شده اشتراک گرفتیم؟



آقا اجازه؟ فب معلومه، چون فقط ریشه‌ی مشترک میتونه هر سه عبارت رو همزمان صفر کنه.

اگه مجموع n تا عبارت بزرگ‌تر یا مساوی صفر، برابر صفر شد، بدونید که این تساوی امکان نداره، مگه این‌که هر n عبارت، همزمان صفر بشن.

۱۴

حل معادلات تو در تو (مسلسل)

۱۴

مثال معادله $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}=2$ را حل کنید.

بچه‌ها! همون طور که می‌بینید، این معادله تودر تو هست. یعنی در سمت چپ این معادله دریایی از $\sqrt{x}$ می‌بینید که به صورت تودر تو باهم جمع شدند. برای حل این معادله، با لایه‌ی اول (یعنی $\sqrt{x+\dots}$) کاری نداشته باشید و لایه‌های دوم، سوم، چهارم و ... رو درون جعبه‌ای قرار بدید. یعنی:

$$\sqrt{x + \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \dots}} \right)} = 2$$

آیا به نظر شما عبارت درون جعبه، همون سمت چپ معادله‌ی اولیه‌ای نیست که در صورت سؤال نوشته شده؟ آقا اجازه؟ دقیقاً همینطور، عبارت درون جعبه با سمت چپ معادله‌ی اولیه برابر. پس آگه به جای عبارت درون جعبه، عدد ۲ رو

قرار بدیم، معادله به راحتی حل میشه. یعنی:

$$\sqrt{x + \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \dots}} \right)} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2=4 \Rightarrow x=2$$

جواب معادله

مثال اگر $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \dots}}} = 2$ باشد، $-2x+3$ کدام است؟

$$\frac{1}{x + \left(\frac{1}{x + \frac{1}{x + \dots}} \right)} = 2$$

عبارت درون جعبه، همون سمت چپ معادله‌ی اولیه هست

$$\frac{1}{x+2} = 2$$

$$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$$

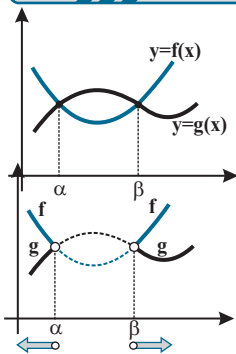
$$\Rightarrow x = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow -2x+3 = -2\left(\frac{-3}{2}\right)+3 = 6$$

۱۵

حل معادله $f(x)=g(x)$ به روش برخورد (روش هندسی)

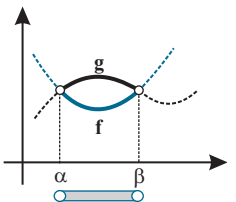
۱۵



بچه‌ها به مثال: در شکل روبرو نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در یک دستگاه مختصات رسم شده. همونطور که می‌بینید ایندو تابع، یکدیگر رو در دو نقطه به طول‌های $x=\alpha$ و $x=\beta$ قطع کردن.

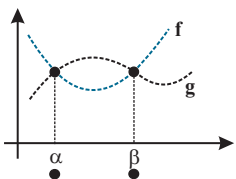
سوال (۱) به نظر شما در چه محدوده‌ای از x تابع f از g بزرگ‌تره؟

آقا اجازه؟ در محدوده‌ی $x > \beta$ یا $x < \alpha$ ، تابع f بالاتر از g قرار داره. یعنی $f(x) > g(x)$



سوال (۲) فکر می‌کنید در کدام محدوده از x تابع f از g کوچک‌تره؟

آقا اجازه؟ در محدوده‌ی $\alpha < x < \beta$ ، تابع f پایین‌تر از g قرار داره. یعنی $f(x) < g(x)$



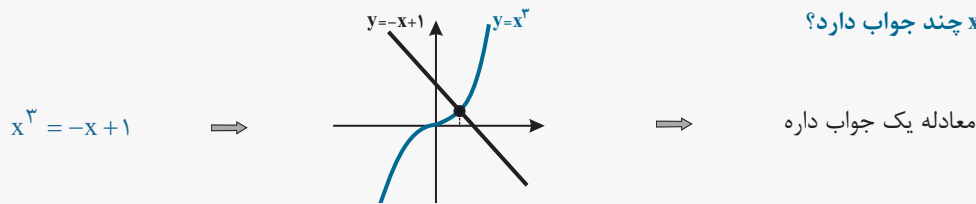
سوال (۳) آیا x یا x ‌هایی سراغ دارید که در اونجا دو تابع f و g با هم مساوی بشن؟

آقا اجازه؟ بله. در $x = \alpha$ و $x = \beta$ دو تابع f و g با هم برابرند. یعنی $f(x) = g(x)$

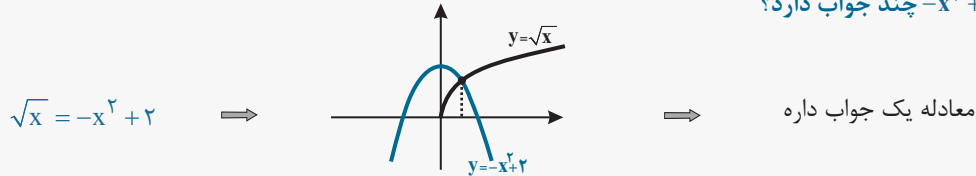
برای حل معادله‌ی $f(x) = g(x)$ به روش هندسی (برخورد):
 (۱) نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ رو در یک دستگاه رسم کنید.
 (۲) طول نقاط برخورد این دو تابع، جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g(x)$ هستند.

تعداد جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g(x)$ ، همون تعداد نقاط برخورد دو تابع f و g هست.

مثال معادله‌ی $x^3 + x - 1 = 0$ چند جواب دارد؟

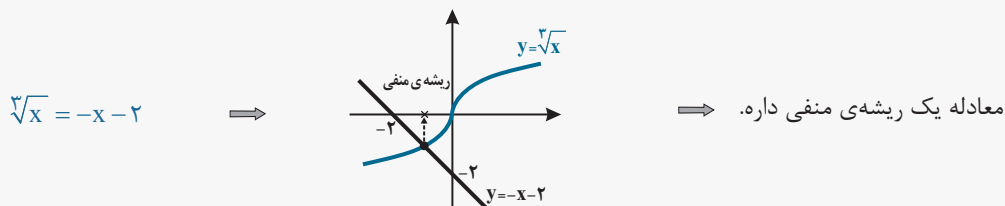


مثال معادله‌ی $-x^2 + 2 - \sqrt{x} = 0$ چند جواب دارد؟



مثال معادله‌ی $x + \sqrt[3]{x} + 2 = 0$

(۱) یک ریشه‌ی مثبت دارد. (۲) یک ریشه‌ی منفی دارد. (۳) یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد. (۴) ریشه ندارد.



۱۶

کاربرد معادلات در مسائل روزمره

۱۶

بچه‌ها! آیا می‌تونید مسائل زیر رو با تبدیل کردن به معادله، حل کنید.  آقا اجازه؟ سعی نمودم رو می‌کنیم.

مثال رضا و محسن با هم پروژه‌ای را در ۲۰ روز به اتمام می‌رسانند. اگر رضا این پروژه را به تنهایی ۹ روز دیرتر از محسن انجام دهد، محسن ظرف چند روز پروژه‌ی مذکور را به تنهایی انجام خواهد داد.

آقا اجازه؟ سفته 

عزیزم! اصلاً اینطوری نیست. برای اینکه به سادگی این سؤال پی ببری، لطفاً به سؤالات من جواب بده!

سؤال (۱) به نظرت در ۱ روز، رضا و محسن با هم چه کسری از پروژه رو تموم می‌کنن؟ 

آقا اجازه؟ وقتی دوتایی در ۲۰ روز یک پروژه رو انجام می‌دن، پس در ۱ روز، $\frac{1}{20}$ پروژه رو انجام می‌دن. 

سؤال (۲) فکر می‌کنی در ۱ روز، محسن چه کسری از پروژه رو تموم می‌کنه؟ 

آقا اجازه؟ آگه محسن در x روز یک پروژه رو به تنهایی تموم کنه، پس محسن در ۱ روز، $\frac{1}{x}$ پروژه رو تموم می‌کنه. 

سؤال (۳) حالا بگو در ۱ روز، رضا چه کسری از پروژه رو انجام میده؟



آقا ابازنه! چون رضا در $x+9$ روز، پروژه رو به تنهایی انجام میده پس رضا در ۱ روز، $\frac{1}{x+9}$ پروژه رو انجام میده.
سؤال ۴) به نظرت در ۱ روز چه ارتباطی بین کار انجام شده توسط (محسن)، (رضا) و (هردوشون) وجود داره؟ آقا ابازنه! در ۱ روز:

(کار انجام شده توسط رضا) + (کار انجام شده توسط محسن) = (کار انجام شده توسط هر دو)

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+9} \Rightarrow \frac{1}{20} = \frac{(x+9)+(x)}{(x)(x+9)} \Rightarrow \frac{2x+9}{x^2+9x} = \frac{1}{20} \Rightarrow x^2+9x=40x+180$$

$$x^2-31x-180=0 \Rightarrow (x+4)(x-45) \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=45 \end{cases} \text{ چرا؟}$$

محسن و رضا به تنهایی و به ترتیب ظرف ۴۵ روز و (۴۵+۹) روز پروژه رو به اتمام می‌رسونن.

آقا ابازنه! تازه فهمیدیم کلید حل این نوع مسائل، واحد زمانه!



در واقع شما اومدید در ۱ واحد زمان کار انجام شده توسط رضا، محسن و هر دوشون رو مشخص کردید و بعد گفتید در ۱ واحد زمان:

کار انجام شده توسط رضا + کار انجام شده توسط محسن = کار انجام شده توسط هر دو

آقا ابازنه! به نظر می‌رسه که این نوع مسائل رو میشه تعمیم داد و قانونمندشون کرد. یعنی:



اگه n نفر کاری رو با هم ظرف a واحد زمانی انجام بدن و نفر اول، دوم، ... و n ام همون کار رو به تنهایی و به ترتیب در $b_1, b_2, \dots, b_n$ واحد زمانی به اتمام برسونن، اون موقع:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$$

مثال لیلی به همراه تعدادی از دوستانش به یک موزه تاریخی رفت و پول بلیط همه‌ی آنها ۱۰۰۰ تومان شد. اما هر کدام از دوستانش تصمیم گرفتند که ۵۰ تومان اضافه بدهند تا لیلی پول بلیط خود را ندهد. دوستان لیلی چند نفر بودند؟



آقا ابازنه! مدل این سؤال با سؤال قبلی فرق می‌کنه. اگه یه کم ما رو راهنمایی کنید فودمون می‌تونیم به جواب برسیم.

عزیزم! در حل مسائل کاربردی اگه شما یاد بگیری چه جوری زبون

فارسی رو به زبون ریاضی ترجمه کنی، به راحتی می‌تونی از پسشون بریای.



آقا ابازنه! با توجه به توصیه‌ی شما، میرم سراغ ترجمه‌ی جمله‌ی اول به زبون ریاضی:

* اگه لیلی و دوستانش n نفر باشن و قیمت هر بلیط x تومان باشه پس: $nx = 1000$

حالا جمله‌ی دوم رو به زبون ریاضی ترجمه می‌کنیم:

* چون لیلی پول بلیطش رو نمی‌ده، پس تعداد خریداران بلیط، $(n-1)$ نفر میشن. اما هر کدومشون باید $(x+50)$ تومان پول بدن تا بتونن

۱۰۰۰ تومان رو پر کنن. پس: $(n-1)(x+50) = 1000$

$$\begin{cases} nx = 1000 \Rightarrow x = \frac{1000}{n} \\ (n-1)(x+50) = 1000 \Rightarrow (n-1)\left(\frac{1000}{n} + 50\right) = 1000 \Rightarrow \cancel{1000} + 50n - \frac{1000}{n} - 50 = \cancel{1000} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \times n \rightarrow 50n^2 - 50n - 1000 &= 0 \Rightarrow n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n+4)(n-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=5 \end{cases} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad (+4) \quad \quad \quad (-5) \end{aligned}$$

از اونجایی که لیلی و دوستانش ۵ نفر هستن، پس دوستان لیلی میشن ۴ نفر.

آقا ابازنه! راست می‌گفتید که: «کافیه مسائل کاربردی رو از فارسی به ریاضی ترجمه کنید تا حل بشن»



۱۷

به چه معادله ای، اتحاد می گویند؟

۱۷

$$\frac{1}{x+3} = \frac{1}{y}$$

بچه‌ها به معادله‌ی روبرو نگاه کنید:

به نظر شما دامنه‌ی این معادله چیه؟

آقا اجازه؟! یه x فرابکار توی این معادله وجود داره، اونهم $x = -3$. در واقع $x = -3$ باعث تعریف نشدن یک طرف

معادله میشه. بنابراین دامنه‌ی این معادله هر x حقیقی می‌تونه باشه بجز -3 . یعنی: $D = \mathbb{R} - \{-3\}$

فکر می‌کنید به جای x چه عددی بذاریم تا دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشه؟

آقا اجازه؟! جواب این معادله فقط میتونه $x = 4$ باشه و آگه به جای x هر عدد دیگه‌ای غیر از 4 بذاریم تعادل ترازو بهم میریزه.

به نظر شما جواب این معادله (یعنی $\{4\}$) قسمتی از دامنه‌ی این معادله، یعنی $\mathbb{R} - \{-3\}$ هست یا نه؟

آقا اجازه؟! فهمیدیم پی می‌فویاید بگیرد. شما می‌فویاید بگیرد که: همیشه مجموعه جواب یک معادله قسمتی از دامنه‌ی اون معادله هست.

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

بچه‌ها! حالا به من بگید که دامنه‌ی معادله‌ی روبرو چیه؟

آقا اجازه؟! در این معادله دو تا x فرابکار داریم بنام‌های $x = -1$ و $x = 1$ که مفرج کسر رو صفر می‌کنن و باعث تعریف نشدن معادله می‌شن

بنابراین: $D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

به نظر شما به جای x چه عددی یا عددهایی می‌تونیم بذاریم تا دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشه؟

آقا اجازه؟! از اونجایی که مفرج‌های این دو کفه همیشه با هم برابرن پس همیشه به جای x هر عددی بجز ± 1 قراردارد، طوری که

دو کفه‌ی ترازو با هم برابر بشن، یعنی مجموعه‌ی جواب این معادله برابره با: $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

به نظر شما مجموعه جواب این معادله، قسمتی از دامنه هست یا تمام دامنه؟

آقا اجازه؟! در سؤال قبلی مجموعه جواب، قسمتی از دامنه بود اما در این سؤال مجموعه‌ی جواب، همه‌ی دامنه هست.

به معادلاتی که مجموعه‌ی جوابشون تمام دامنه‌ی اون معادله باشه اتحاد می‌گیم.

در واقع یک اتحاد، معادله‌ایه که به ازای تمام x های دامنه برقراره.

آقا اجازه؟! از صفت‌های شما فهمیدم که: هر اتحاد یک معادله هست اما هر معادله ممکنه یک اتحاد نباشه.

کاملاً درست فهمیدی عزیزم.

بچه‌ها! در مبحث دیفرانسیل و پایه چند اتحاد مهم داریم که دونستن اونها برای شما الزامیه. پس لطفاً دقت کنید:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(۱) اتحاد مربع

مثال $A) (2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \Rightarrow (2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$B) (x^2-2y)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(2y) + (2y)^2 \Rightarrow (x^2-2y)^2 = x^4 - 4x^2y + 4y^2$

$C) x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2$ $E) x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$

$D) x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$ $F) 4x^2 \pm 4x + 1 = (2x \pm 1)^2$

(۲) اتحاد مکعب

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



بچه‌ها! همونطور که می‌بینید اگه در سمت چپ ترازو، علامت بین دو جمله، مثبت باشه حتماً علامت‌های سمت راست معادله، همگی مثبت می‌شن. اما اگه در سمت چپ ترازو، علامت بین دو جمله، منفی باشه در اون صورت علامت‌های سمت راست معادله، یه در میون مثبت و منفی می‌شن.

مثال $(x \pm 1)^3 = (x)^3 \pm 3(x)^2(1) + 3(x)(1)^2 \pm (1)^3 \Rightarrow (x \pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$

$(x \pm 2)^3 = (x)^3 \pm 3(x)^2(2) + 3(x)(2)^2 \pm (2)^3 \Rightarrow (x \pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$

مثال جواب معادله‌ی $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ را به دست آورید.

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{(x+1)^3} + 8 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = -8 \xrightarrow{\sqrt[3]{\quad}} x+1 = -2 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

مثال معادله‌ی $x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = 0$ چند جواب دارد؟

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x = 0 \Rightarrow (x-1)^3 = -2x \xrightarrow{\text{روش برخورد}} \begin{array}{c} y = (x-1)^3 \\ y = -2x \end{array} \Rightarrow \text{معادله یک جواب دارد}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

(۳) اتحاد مزدوج

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

۱) $4x^2 - 9y^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

۲) $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

۳) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \Rightarrow x^4 + 4 = (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

مثال صورت عبارت‌های زیر را گویا کنید. (از حالت رادیکالی خارج کنید)

۱) $\sqrt{x} - 2 = \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$

۲) $2x - \sqrt{3} = \frac{(2x - \sqrt{3})(2x + \sqrt{3})}{(2x + \sqrt{3})} = \frac{(2x)^2 - (\sqrt{3})^2}{2x + \sqrt{3}} = \frac{4x^2 - 3}{2x + \sqrt{3}}$

۳) $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = \frac{x - (x-1)}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$

(۴) اتحاد یک جمله‌ی مشترک

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + (\alpha \cdot \beta) = (x + \alpha)(x + \beta)$$

بچه‌ها! به اتحاد روبرو، اتحاد یک جمله‌ی مشترک می‌گیم:



مثال معادلات زیر را حل کنید.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$x^2 - 1x - 30 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=6 \end{cases}$$

$$9x^2 + 21x + 10 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 7(3x) + 10 = 0 \Rightarrow (3x+2)(3x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$a^3 + b^3 = (a \oplus b)(aa \ominus ab + bb)$$

$$a^3 \ominus b^3 = (a \ominus b)(aa \oplus ab + bb)$$

۵ اتحاد چاق و لاغر

بچه‌ها! فکر می‌کنید در اتحاد چاق و لاغر چه ارتباطی بین سمت چپ اتحاد و قسمت لاغر وجود دارد؟



آقا اجازه؟ کلاهبرداری!!!

منظورم اینست که آله کلاه رو از روی سر $a + b$ یا $a - b$ برداریم قسمت لاغر بوفورد می‌آد. یعنی: $a + b = (a+b)(\text{چاق})$ $a - b = (a-b)(\text{چاق})$

$$a - b = (a-b)(\text{چاق})$$

بچه‌ها! پس فهمیدیم که با یک کلاهبرداری میشه قسمت لاغر رو بوجود آورد. حالا به نظر شما چه جور میشه از قسمت لاغر، قسمت



چاق رو نتیجه گرفت؟

جمله‌ی سوم جمله‌ی وسط جمله‌ی اول
(aa ab bb)

آقا اجازه؟ قسمت چاق، سه جمله دارد. یعنی



علامت جملات اول و سوم مثبت، اما علامت

جمله‌ی وسط، ممکنه مثبت باشه ممکنه منفی. یعنی:

$$(a \oplus b)(aa \ominus ab + bb)$$

$$(a \ominus b)(aa \oplus ab + bb)$$

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$1) x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x \oplus 1)(xx \ominus x(1) + (1)(1)) \Rightarrow x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$2) x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x \ominus 1)(xx \oplus x(1) + (1)(1)) \Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$3) x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x \oplus 2)(xx \ominus x(2) + (2)(2)) \Rightarrow x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$4) x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x \ominus 3)(xx \oplus x(3) + (3)(3)) \Rightarrow x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$5) 8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x \ominus 3y)((2x)(2x) + (2x)(3y^2) + (3y^2)(3y^2)) = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy^2 + 9y^4)$$

مثال صورت عبارات زیر را گویا کنید.

$$1) \sqrt[3]{x} - 2 = \frac{\overbrace{(\sqrt[3]{x} - 2)}^{\text{لاغر}}}{\overbrace{(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x}) + (2)(\sqrt[3]{x}) + (2)(2)}^{\text{چاق}}} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 - 2}{\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}^2 + 2\sqrt[3]{x} + 4}$$

بچه‌ها! در مثال قبل، $\sqrt[3]{x} - 2$ رو قسمت لاغر در نظر گرفتیم و این عبارت رو در قسمت چاقش ضرب و تقسیم کردیم تا بتونیم



روی سر $(\sqrt[3]{x})$ و (2) ، کلاه (3) رو قرار بدم.

$$2) \sqrt[3]{x} + 1 = \frac{\overbrace{(\sqrt[3]{x} + 1)}^{\text{لاغر}}}{\overbrace{(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x}) - \sqrt[3]{x}(1) + (1)(1)}^{\text{چاق}}} = \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + 1}{\sqrt[3]{x}^2 - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}^2 - \sqrt[3]{x} + 1}$$

۶) بسط دو جمله ای $(a+b)^n$



بچه‌ها! به بسط دو جمله‌ای‌های روبرو توجه کنید:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 \\&\vdots\end{aligned}$$

سؤال: بدون اینکه به ضرایب سمت راست تساوی توجهی داشته باشید همیشه بگید ساختار (اسکلت) این بسط از چه قانونی تبعیت می‌کند؟



$$(a+b)^n = 1a^n + \dots + 1b^n$$

آقا اجازه؟ در بسط $(a+b)^n$ آکه عضو اول رو به توان n عضو اول

در نوشتن جملات بعدی باید به ترتیب از توان a یکی یکی کم و به توان b یکی یکی اضافه کنیم و این عمل رو تا اونجایی ادامه بدیم

$$(a+b)^n = 1a^n + \dots + 1b^n$$

که a منف بشه و b به بیشترین توان خودش برسه. یعنی: b^n بسط پیدا همیشه n یعنی:

آقا اجازه؟ همیشه بگیر ضرایب این بسط رو چه‌موری بنویسم. چون ضرایب هر کدوم از بسط‌های بالا ساز خودشون رو می‌زنن.



عزیزم اصلاً اینطوری نیست، اتفاقاً ضرایب بسط دو جمله‌ای از یک قانون خاصی تبعیت می‌کنن.

به عنوان مثال می‌خوایم ضرایب بسط $(a+b)^5$ رو بدست بیاریم. شما اول باید اسکلت یا ساختار بسط رو بنویسید و جای

$$(a+b)^5 = 1a^5 + \underbrace{\quad a^4b}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{\quad a^3b^2}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \underbrace{\quad a^2b^3}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \underbrace{\quad ab^4}_{\text{جمله‌ی پنجم}} + \underbrace{\quad b^5}_{\text{جمله‌ی ششم}}$$

ضرایب رو خالی بذارید. یعنی:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + \underbrace{5a^4b}_{\div 1} + \underbrace{10a^3b^2}_{\div 2} + \underbrace{10a^2b^3}_{\div 3} + \underbrace{5ab^4}_{\div 4} + 1b^5$$

شما می‌تونید طی مراحل زیر، ضریب هر جمله رو به کمک جمله‌ی قبل محاسبه کنید. یعنی:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \underbrace{10a^2b^3}_{\div 2} + \underbrace{5ab^4}_{\div 3} + 1b^5$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

(سومین جمله) $n=3$ توجه:

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

(پنجمین جمله) $m=5$ توجه:

مثال بسط دو جمله‌ای‌های زیر را بنویسید.

$$\begin{aligned}1) (x+1)^6 &= 1x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 \\ \Rightarrow (x+1)^6 &= \frac{1x^6}{1} + \frac{6x^5}{6 \times 1} + \frac{15x^4}{15 \times 4} + \frac{20x^3}{20 \times 3} + \frac{15x^2}{15 \times 2} + \frac{6x}{6 \times 1} + 1 \\ 2) (x^3 + 2x)^5 &= 1(x^3)^5 + 5(2x)(x^3)^4 + 10(2x)^2(x^3)^3 + 10(2x)^3(x^3)^2 + 5(2x)^4(x^3) + 1(2x)^5 \\ \Rightarrow (x^3 + 2x)^5 &= x^{15} + 10x^{13} + 40x^{11} + 80x^9 + 80x^7 + 32x^5\end{aligned}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

بچه‌ها! بسط دو جمله‌ای $(a-b)^n$ مثل بسط دو جمله‌ای

$(a+b)^n$ هست، فقط با یک تفاوت. یعنی: جملات دوم،

چهارم و ... بسط $(a-b)^n$ علامت منفی دارن. نگاه کنید:

بچه‌ها! بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ در حالت کلی به صورت زیره:

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^n}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}_{\text{جمله‌ی } k+1 \text{ ام}} + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

حالا ازتون خواهش می‌کنم به بسط بالا دقت کنید و با توجه به جملات اول، دوم و سوم حدس بزنید جمله‌ی $k+1$ ام این بسط، چیه؟

جمله‌ی اول: $\binom{n}{0}a^n b^0$

جمله‌ی دوم: $\binom{n}{1}a^{n-1}b^1$

جمله‌ی سوم: $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$

تعمیم

$$\text{جمله‌ی } (k+1) \text{ ام} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

بچه‌ها! بسط $(a-b)^n$ هم مثل $(a+b)^n$ هست. اما با این تفاوت که در بسط $(a-b)^n$ جملات زوج (یعنی جملات دوم، چهارم

و ...) علامت منفی دارن.

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{\binom{n}{2}a^{n-2}b^2}_{\text{جمله‌ی سوم}} - \underbrace{\binom{n}{3}a^{n-3}b^3}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \dots + \underbrace{\binom{n}{k}a^{n-k}b^k}_{\text{جمله‌ی } k \text{ ام}} + \dots$$

اگر $k+1$ زوج باشه

مثال در بسط $(x - \frac{2}{x})^7$ جمله‌ی چهارم چیست؟

$$\text{جمله‌ی چهارم} = -\binom{7}{3}(x)^{7-3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 = \frac{-7!}{3!(7-3)!} \times x^4 \times \frac{\lambda}{x^3} = -28 \times x$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

همگی مثبت

۷ اتحاد چاق و لاغر تعمیم یافته

بچه‌ها! به اتحادهای چاق و لاغر روبرو نگاه کنید:

شما می‌تونید کامل کردن طرف دوم $a^n - b^n$ رو در ۳ مرحله انجام بدید:

مرحله ۱: کلاه $a^n - b^n$ رو بردارید تا به قسمت لاغر برسید. یعنی: $a^n - b^n = (a-b)(\dots)$

مرحله ۲: در قسمت چاق، ابتدا a^{n-1} رو بنویسید و در جملات بعدی به ترتیب از توان a یکی یکی کم و به توان b یکی یکی اضافه کنید.

البته این عمل رو تا زمانی انجام بدید که از a چیزی باقی نمونه و b به بیشترین توان خودش برسه. یعنی:

$$a^n - b^n = (a-b)(\overset{\text{منفی}}{a^{n-1}} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

مرحله ۳: با توجه به این که در قسمت لاغر علامت بین دو جمله منفیه، پشت تمام جملات چاق، علامت مثبت بذارید. یعنی:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$



بچه‌ها! تفاوت $a^n + b^n$, $a^n - b^n$ فقط در مرحله‌ی سومه.

یعنی با توجه به اینکه در قسمت لاغر علامت بین دو جمله مثبت، پشت جملات چاق، یک در میون علامت مثبت و منفی بذارید.

اتحاد چاق و لاغر رو برای $a^n + b^n$ فقط وقتی می‌تونید بنویسید که n فرد باشه.

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^5 + b^5 &= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diagram showing the signs of terms in the expansion: a^4 (positive), $-a^3b$ (negative), a^2b^2 (positive), $-ab^3$ (negative), b^4 (positive). Arrows indicate the alternating signs.

مثال عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + (x)(1) + (1)^2) \Rightarrow x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$۲) x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$۳) x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

$$۴) x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$۵) x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$۶) x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + 1) \quad \text{توجه: } (n \text{ فرد است})$$

$$۷) x^4 - 16 = x^4 - 2^4 = (x-2)(x^3 + x^2(2) + x(2)^2 + (2)^3) \Rightarrow x^4 - 16 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)$$

$$۸) x^5 + 32 = x^5 + 2^5 = (x+2)(x^4 - x^3(2) + x^2(2)^2 - x(2)^3 + (2)^4) \Rightarrow x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

۱۸

انواع ریشه‌های یک تابع

۱۸

بچه‌ها! به نظر شما ریشه‌ی توابع زیر چیه و قیافه‌ی نمودار این توابع در اطراف ریشه‌شون چه شکلیه؟ توجه: $(a > 0)$

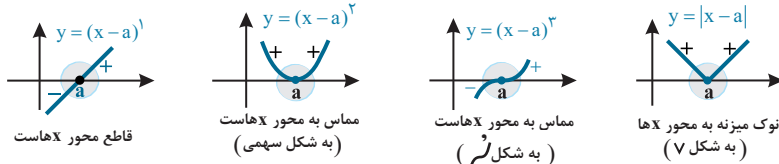
$$۱) y = x - a$$

$$۲) y = (x-a)^2$$

$$۳) y = (x-a)^3$$

$$۴) y = |x-a|$$

آقا اجازه؟ با اینکله ریشه‌ی توابع بالا $x = a$ هست، اما با توجه به شکل‌های زیر، قیافه‌ی نمودارها در اطراف $x = a$ یک جور نیست؟



عزیزم! این تفاوت به نوع ریشه‌ی یک تابع مربوط میشه. در واقع، تعیین کننده‌ی قیافه‌ی نمودار در اطراف ریشه، نوع اون ریشه هست، نه مقدار اون ریشه.

توضیح ۱) در تابع $y = x - a$ ، مقدار ریشه، $x = a$ و نوع ریشه، ساده هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار میدی، $x = a$ یکبار رخ میده:

$$y = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$$

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی ساده به شکل قاطع (یا $\curvearrowright$) هست. $(a > 0)$

توضیح ۲) در تابع $y = (x-a)^2$ ، مقدار ریشه، $x = a$ و نوع ریشه، مکرر مرتبه‌ی ۲ (ریشه‌ی مضاعف) هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار بدی،

$$y = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \Rightarrow (x-a)(x-a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x = a \end{cases} \quad \text{دو بار تکرار میشه:}$$

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج شبیه سهمی (یا $\curvearrowright$) هست. $(a > 0)$

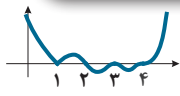
توضیح ۳) در تابع $y = (x-a)^3$ ، مقدار ریشه، $x = a$ و نوع ریشه، مکرر مرتبه‌ی ۳ هست. چون وقتی تابع رو مساوی صفر قرار بدید، $x = a$ سه بار تکرار میشه:

$$y = 0 \Rightarrow (x-a)^3 = 0 \Rightarrow (x-a)(x-a)(x-a) = 0 \Rightarrow x = a \text{ یا } x = a \text{ یا } x = a$$

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد شبیه لُ (یا $\hookrightarrow$) هست. ($a > 0$)

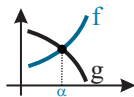
توضیح ۴) در تابع $x = |x-a|$ ، ریشه‌ی $x = a$ معروفه به ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق.

قیافه‌ی نمودار یک تابع در اطراف ریشه‌ی ساده‌ی درون قدرمطلق شبیه $\vee$ یا $\wedge$ هست. ($a > 0$)

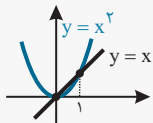


بچه‌ها! نمودار تابع $y = |x-1|(x-2)(x-3)^2(x-4)^3$ به شکل مقابله :
اگر توضیحات ۱ تا ۴ رو خوب متوجه شده باشید، به راحتی می‌تونید نمودار این تابع رو رسم کنید.

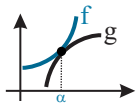
بچه‌ها! فرض کنید $x = \alpha$ ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = g(x)$ باشه:



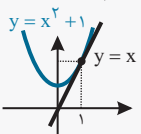
الف) اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی ساده باشه، نمودارهای f و g همدیگر رو در $x = \alpha$ قطع می‌کنن.



مثلاً در حل معادله‌ی $x^2 = x$ به روش جبری $x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$ می‌بینیم که $x=0$ و $x=1$ ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $x^2 = x$ هستن. از طرفی، اگر نمودارهای $y = x^2$ و $y = x$ رو رسم کنیم، مشاهده می‌کنیم که این دو نمودار همدیگر رو در $x=0$ و $x=1$ قطع می‌کنن.

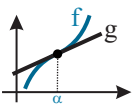


ب) اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی مکرر زوج معادله‌ی $f(x) = g(x)$ باشه، نمودارهای f و g در $x = \alpha$ بدون عبور از هم به هم مماس میشن.



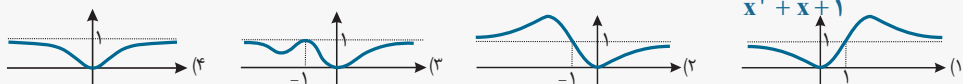
می‌بینیم

مثلاً در حل معادله‌ی $x^2 + 1 = 2x$ به روش جبری $x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=1 \end{cases}$ می‌بینیم که $x=1$ ریشه‌ی مکرر زوج. از طرفی نمودارهای $y = x^2 + 1$ و $y = 2x$ در $x=1$ بدون عبور از هم به هم مماس میشن.



ج) اگر $x = \alpha$ ریشه‌ی مکرر فرد معادله‌ی $f(x) = g(x)$ باشه، نمودارهای f و g از هم عبور کرده و به هم مماس میشن.

مثال نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ کدامیک از شکل‌های زیر است؟



آقا اجازه؟ اگر وضعیت برافورد نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$ با فط $y=1$ رو بررسی کنیم خیلی چیزها روشن میشه. پس کافیه

این دو تابع رو با هم مساوی قرار بدیم:
 $\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow x^2 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
از اونجایی که ریشه‌ی این معادله (یعنی $x = -1$) ساده هست پس نمودار تابع و نمودار $y=1$ همدیگر رو در $x = -1$ قطع می‌کنن.

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

- ۱) ۷۲ لیتر آبمیوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. اگر حجم هر شیشه عدد طبیعی باشد حداقل تعداد شیشه ها چقدر است؟
 (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴
 متن کتاب
- ۲) چند جمله ای درجه دوم $h(x)$ ب.م.م عبارت های $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ و $g(x) = x^6 + 2ax^3 + ax^2$ می باشد. مجموعه مقادیر a کدام است؟
 (۱) $\{-\frac{1}{3}, 1\}$ (۲) $\{-\frac{1}{3}\}$ (۳) $\{1\}$ (۴) $\emptyset$
- ۳) طول قطر چرخ کوچک و بزرگ یک تراکتور به ترتیب ۱۰۰ و ۱۶۰ سانتی متر است. در ابتدای حرکت نقاط روی زمین این چرخ ها را علامتگذاری می کنیم. این تراکتور حداقل چه مسافتی را باید طی کند تا دوباره نقاط روی چرخ ها با هم به زمین برسند؟
 (۱) 200π (۲) 800π (۳) 600π (۴) 400π
 متن کتاب
- ۴) سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف وجود دارد. اولین زنگ در هر ۱۸ دقیقه، دومین زنگ در هر ۲۴ دقیقه و سومین زنگ در هر ۳۲ دقیقه می زند. بعد از اولین بار که آنها با هم به صدا در می آیند حداقل چند دقیقه می گذرد تا دوباره با هم به صدا در آیند؟
 (۱) ۱۷۸ (۲) ۲۸۸ (۳) ۴۲۸ (۴) ۹۳۶
 متن کتاب
- ۵) نمودار توابع چند جمله ای f, g در شکل زیر رسم شده اند. ب.م.م و ک.م.م ضابطه های f, g به ترتیب چه درجه ای دارند؟
 (۱) ۴، ۱ (۲) ۸، ۳ (۳) ۶، ۲ (۴) ۷، ۴
 استاد مبتنی بیات (سر گروه همدان)
- ۶) در یک کیسه گردو بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ گردو وجود دارد. اگر این گردوها را چهارتا، چهارتا، پنج تا پنج تا و شش تا، شش تا بشمریم در هر حالت ۳ گردو باقی می ماند. تعداد گردو ها چندتا است؟
 (۱) ۱۸۳ (۲) ۱۸۸ (۳) ۱۷۸ (۴) ۱۵۸
 متن کتاب
- ۷) اگر معادله $x^2 + bx + c = 0$ یک ریشه ی مضاعف داشته باشد، معادله ی $x^2 + bx + c - 3 = 0$ چه وضعی دارد؟ ($b \in \mathbb{Q}$)
 (۱) ریشه ی مضاعف دارد (۲) دو ریشه ی گنگ دارد.
 (۳) دو ریشه ی گویا دارد. (۴) ریشه ندارد.
- ۸) α و β ریشه های معادله ی $7x^2 + 3x - 1 = 0$ هستند و $\alpha < \beta$. کدامیک همواره صحیح است؟
 (۱) $\alpha < -1 < \beta$ (۲) $-1 < \alpha < \beta < 1$ (۳) $\alpha < \beta < 2$ (۴) $\alpha < 2 < \beta$
- ۹) معادله ی $2 = (x^2 + \frac{1}{x}) + 3(x + \frac{1}{x})$ چند ریشه ی حقیقی متمایز دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 دکتر سازگار (سر گروه مازندران)
- ۱۰) فاصله ی بین ریشه های معادله ی $x - 4\sqrt{x-2} + 1 = 0$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۱۱) از حل دستگاه معادلات $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = 12 \end{cases}$ مقدار $x.y$ کدام است؟
 (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $\frac{9}{4}$
- ۱۲) معادله ی $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = x-1$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 متن کتاب با کمی تغییر
- ۱۳) بر روی محور اعداد حقیقی دو عدد وجود دارد که فاصله آن ها از نقطه ای به طول ۳، نصف فاصله شان از نقطه ای به طول ۱- است. مجموع آن دو عدد کدام است؟
 (۱) $\frac{14}{3}$ (۲) $\frac{26}{3}$ (۳) $\frac{20}{3}$ (۴) $\frac{32}{3}$

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

- ۱۴ نمودار دو تابع $y = x^6 - 2x + 3$ و $y = x^6 - 5x - 2$ در یک دستگاه مختصات رسم شده اند. در کدام طول فاصله ی عرضهای دو تابع ۷ می باشد؟
(استاد موسوی (سر گروه هرمزگان)
- ۱۵ معادله ی $(|x-1|-1) = 0$ چند جواب دارد؟
(استاد عادل مهر پاک (همدان)
- ۱۶ جواب معادله $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{12}$ کدام است؟
(استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)
- ۱۷ معادله ی $\sqrt{3x-3} + \sqrt{2x-2} = \frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ چند جواب دارد؟
(استاد عادل مهر پاک (همدان)
- ۱۸ مجموع جواب های معادله ی رادیکالی $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = 1$ کدام است؟
(استاد فامدا (سر گروه قزوین)
- ۱۹ معادله ی $3x - 2 = 5\sqrt{1-9x^2}$:
(آزاد-۷۶)
- ۲۰ معادله ی $\sqrt[4]{x^3 + x - 10} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0$ چند جواب دارد؟
(استاد مریم عالی (سر گروه کرمان)
- ۲۱ معادله ی $\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5} = \frac{11}{y}$ چند جواب دارد؟
(دکتر سازگار (سر گروه مازندران)
- ۲۲ معادله ی $\frac{4^x + 1}{2 - x^4} = 2^x$ چند جواب دارد؟
(دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)
- ۲۳ معادله ی $\left|x - \frac{1}{y}\right| - x^2 = \sqrt{x^2 - x + 2} + \frac{1}{y}$ چند جواب دارد؟
(استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)
- ۲۴ معادله ی $x^2 + 2|x| = 15 - \sqrt{|x| - 3}$ چند جواب دارد؟
- ۲۵ دو نقطه ی A و B روی خط $y = x$ مفروضند به طوری که فاصله ی هر نقطه از نقطه ی $w(1,2)$ برابر طول آن نقطه می باشد. مساحت مثلث ABW کدام است؟
- ۲۶ جواب معادله ی $\frac{2}{x-2} + \frac{k}{x+1} = 0$ کدام است؟
- ۲۷ جواب معادله ی $\frac{2k-2}{2k+1}, k \neq -\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2k-2}{k+2}, k \neq -2, 0$ (۳) $\frac{2k+1}{k-2}, k \neq 2$ (۲) $\frac{k+1}{2k-2}, k \neq 1$ (۱)

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

- ۲۷ در اتحاد $\frac{8x-15}{x^2-3x} + \frac{3}{3-x} = \frac{A}{x}$ عدد A کدام است؟ (استاد عادل ابراهیمی (تهران)
- (۱) ۱۲ (۲) ۵ (۳) -۱۲ (۴) -۵
- ۲۸ معادله $|x^3 - 1| - x = 0$ چند ریشه دارد؟ (استاد رمب زاده (سر گروه فارس)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۲۹ چه تعداد از معادلات روبرو جواب دارند؟ $2^x = x^2$ $\sqrt{x-1} = x-3$ $\sqrt{x} - x = 1$ $\sqrt{x} + \cos x = 0$ (استاد عادل ابراهیمی (تهران)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۳۰ کدامیک از معادلات زیر تعداد ریشه ی بیشتری دارد؟ (امیر مسین نصیری (تهران)
- (۱) $|x-1| = 5$ (۲) $|x^2 - 2| = 2$ (۳) $x|x| = -4$ (۴) $|2x-1| + |x| = 7$
- ۳۱ معادله $2x+2 = a^x$ با شرط $(a > 0, a \neq 1)$:
 (۱) فقط یک ریشه دارد.
 (۲) ریشه ندارد.
 (۳) حداکثر یک ریشه دارد.
 (۴) حداقل یک ریشه دارد.
- ۳۲ معادله $y = \sqrt{x}$ $\frac{2x-1}{x-3} = \sqrt{x}$ چند جواب دارد؟
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۳۳ کدام معادله دو ریشه متمایز دارد؟ (فانم نسرين باقری (قم)
- (۱) $\frac{2x-1}{x-1} = 5-x$ (۲) $\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2$ (۳) $2x - \sin x = 0$ (۴) $x^3 - \cos x = 0$
- ۳۴ طول قطعه ای از خط $y = 2$ که محصور بین دو خط $y = x + 2$ و $2y + x = m$ است برابر ۳ می باشد. m کدام است؟ (استاد فانم کریمیان (قم)
- (۱) ۳ (۲) -۷ (۳) ۱ (۴) -۳
- ۳۵ جواب معادله $1 = 2^{x+2^{x+2^{x+\dots}}}$ کدام است؟ (استاد فاندر (عضو گروه ریاضی اصفهان)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲
- ۳۶ بسط $(a+b)^{13} + (a-b)^{13}$ چند جمله دارد؟ (استاد فخر لویی (سر گروه آذربایجان غربی)
- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶
- ۳۷ ضریب جمله ی سوم در بسط دو جمله ای $(2 + \frac{1}{x})^n$ برابر ۲۴۰ است. این بسط چند جمله دارد؟
- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹
- ۳۸ جمله ی چندم بسط دو جمله ای $(3x^2 + \frac{1}{x})^{15}$ مستقل از x است؟ (استاد هوادی (سر گروه آذربایجان غربی)
- (۱) هشتم (۲) نهم (۳) دهم (۴) یازدهم
- ۳۹ بسط دو جمله ای $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b})^{21}$ چند جمله ی گویا دارد؟ (منظور از گویا غیر رادیکالی است) (استاد فاندر (عضو گروه ریاضی اصفهان)
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
- ۴۰ در بسط $(a+b)^n$ جمله نهم بزرگترین ضریب عددی را دارد. n کدام عدد نمی تواند باشد؟ (استاد درایش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)
- (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴) ۱۸

آموزش تکمیلی فصل (۱) در قالب تست

- ۴۱) مجموع ضرایب بسط $(\sqrt{3a} - \sqrt{b})^{2n+2}$ برابر ۲۰۴۸ می باشد. تعداد جملات این بسط کدام است؟ (استاد عادل مهر پاک همدان)
- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۲۲ (۳) ۲۳ (۴)
- ۴۲) در بسط $(\tan x - \cot x)^4$ حاصل ضرب جملات دوم و چهارم چند واحد از جمله ی مستقل از x بزرگتر است؟ $(x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z})$ (استاد عادل مهر پاک همدان)
- ۶ (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)
- ۴۳) جسمی به وزن ۱۵ کیلوگرم از جنس آلیاژ نیکل و کُرُم بوده و ۸۰ درصد آن نیکل می باشد. برای رساندن درصد نیکل به ۶۰ باید چند کیلوگرم کُرُم به این آلیاژ اضافه نمود؟ (استاد مومنی (عضو گروه ریاضی کرمان)
- ۴ (۱) ۴/۵ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴)
- ۴۴) یک راننده با پراید از تهران به سمت اصفهان حرکت کرد و پس از طی ۵۰ کیلومتر یک راننده با پژو و در همان مسیر از تهران حرکت کرد و ۱ ساعت زودتر از راننده ی پراید به اصفهان رسیده. اگر سرعت پراید ۸۰ کیلومتر بر ساعت و سرعت پژو ۱۲۰ کیلومتر بر ساعت باشد فاصله ی تهران تا اصفهان چند کیلومتر است؟ (استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)
- ۳۵۰ (۱) ۳۷۰ (۲) ۳۹۰ (۳) ۴۱۰ (۴)
- ۴۵) درون ظرفی ۴۹ لیتر آب موجود است، x لیتر آب از ظرف خارج نموده و x لیتر متانول درون ظرف می ریزیم. سپس x لیتر از محلول را برمی داریم. اگر در محلول باقی مانده ۳۶ لیتر آب موجود باشد، x کدام است؟ (استاد موسوی (سر گروه هرمزگان)
- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)
- ۴۶) زهرا مقداری عدس و لوبیا خرید. وزن عدس ۲ کیلو گرم بیشتر از لوبیا بود. او برای خرید عدس ۱۵۰ تومان و برای خرید لوبیا ۱۲۰ تومان پول داد. اگر قیمت یک کیلو لوبیا ۵ تومان گرانتر از قیمت یک کیلو عدس باشد، زهرا در مجموع چند کیلو عدس و لوبیا خرید؟ (فانم نسرين باقری (قم)
- ۴ (۱) ۶ (۲) ۸ (۳) ۱۰ (۴)
- ۴۷) فاصله ی بین تهران و قم ۱۰۰ کیلومتر است. راننده ای با پژو ۳۰ دقیقه زودتر از راننده ای با پراید این فاصله را طی کرد. چون سرعت پژو ۱۰ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت پراید بود. سرعت پژو چند کیلومتر بر ساعت بوده است؟ (دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)
- ۴۰ (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴)
- ۴۸) آقای عمادچند اسباب بازی برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می داد او ۴ اسباب بازی بیشتری توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی بدون تخفیف چقدر است؟ (متن کتاب)
- ۲۰۰ تومان (۱) ۶۰۰ تومان (۲) ۸۰۰ تومان (۳) ۵۰۰ تومان (۴)
- ۴۹) حامد در دفترچه ی پس انداز بانکش ۱۰۰۰۰ تومان داشت. بعد از یکسال نصف آنرا برداشت و پس از گذشت دو سال از افتتاح حساب معلوم شد که ۸۴۰۰ تومان در دفترچه اش وجود دارد. بانک در سال چند درصد به حامد سود می دهد؟ (استاد مجتبی بیات (سر گروه همدان)
- ۱۵ (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۷ (۴)
- ۵۰) در ضرب دو عدد که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است اشتباهی رخ می دهد، در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می شود. برای آزمایش حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند، خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده ۲۲ می شود. عدد کوچکتر کدام است؟ (متن کتاب)
- ۲۸ (۱) ۳۱ (۲) ۳۴ (۳) ۳۵ (۴)

(۳): ۱

بچه ها! اگر حجم شیشه ها ۱ لیتری باشد، ۷۲ شیشه برای آب میوه، ۴۰ شیشه برای شیر و ۴۸ شیشه برای دوغ لازم است. اما اگر حجم شیشه ها ۲ لیتری باشد، ۳۶ شیشه برای آب میوه، ۲۰ شیشه برای شیر و ۲۴ شیشه برای دوغ لازم داریم. همونطور که دیدید، حجم شیشه ها باید مقسوم علیه های مشترک اعداد ۷۲، ۴۰ و ۴۸ باشند تا بشه ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ رو در حجم های یکسان بسته بندی کرد.

در صورتی که حجم شیشه ها رو بزرگترین مقسوم علیه مشترک این سه عدد انتخاب کنیم، کمترین تعداد شیشه رو برای بسته بندی لازم داریم. بنابراین:

$$(72, 40, 48) = (2^3 \times 3^2, 2^3 \times 5, 2^4 \times 3) = 2^3 = 8$$

حالا که فهمیدیم حجم شیشه ها باید ۸ لیتری باشد و با توجه به اینکه ۱۶۰ لیتر مایع داریم، میشه نتیجه گرفت که برای بسته بندی ۲۰ شیشه لازم است.

(۲): ۲

$$\begin{cases} f(x) = x(x^2 - 2x^2 + 1) = x(x^2 - 1)^2 = x^1(x-1)^2(x+1)^2 \\ g(x) = x^2(x^2 - 2ax + a) \end{cases} \xrightarrow{m.m} h(x) = x^1(?)$$

بچه ها! برای اینکه درجه ی $h(x)$ از یک بیشتر بشه لازم است که $x^2 - 2ax + a$ بعد از تجزیه شدن حتماً یکی از عامل های $(x-1)$ یا $(x+1)$ رو داشته باشه. به عبارت دیگه، لازمه که $x=1$ یا $x=-1$ ریشه ی $x^2 - 2ax + a$ باشه:

$$\text{اگر } x=1 \text{ ریشه ی } x^2 - 2ax + a \text{ باشه} \Rightarrow (1)^2 - 2a(1) + a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{اگر } x=-1 \text{ ریشه ی } x^2 - 2ax + a \text{ باشه} \Rightarrow (-1)^2 - 2a(-1) + a = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

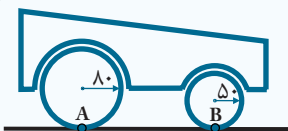
حالا اگر موافق باشید $a=1$ و $a=\frac{-1}{3}$ رو درون $g(x)$ جایگذاری کنیم تا ببینیم f و g چی میشه.

$$a=1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = (x)^1(x-1)^2(x+1)^2 \\ g(x) = (x)^2(x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow h(x) = (x)^1(x-1)^2 \quad (\text{غ ق ق}) \text{ چون } (h(x) \text{ درجه } 2 \text{ نشد})$$

$$a=\frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = (x)^1(x-1)^2(x+1)^2 \\ g(x) = (x)^2(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}) = x^2(x-1)(x+\frac{1}{3}) \end{cases} \Rightarrow h(x) = (x)(x-1) \quad (\text{ق ق}) \text{ چون } (h(x) \text{ درجه } 2 \text{ شد})$$

همونطور که دیدید باید $a=\frac{-1}{3}$ باشه تا $h(x)$ درجه ۲ بشه.

(۳): ۳



وقتی تراکتور شروع به حرکت میکنه، اگر چرخ بزرگ ۱ دور،

۲ دور، ۳ دور و ... بچرخه، نقطه ی A روی زمین قرار میگیره.

پس هر وقت مضربی از محیط چرخ بزرگ رو طی کنیم نقطه ی A روی زمین قرار میگیره.

به همین ترتیب هر وقت مضربی از محیط چرخ کوچک رو طی کنیم نقطه ی B روی زمین قرار میگیره.

اما اگر بخوایم نقاط A و B همزمان روی زمین قرار بگیرن باید مضرب مشترک محیطها رو طی کنیم.

بنابراین کوچکترین مضرب مشترک محیط چرخ ها، میشه اولین باری که بعد از حرکت تراکتور، نقاط A و B همزمان روی زمین قرار می گیرن.

$$[160\pi, 100\pi] = 20\pi[8, 5] = 20\pi \times 40 = 800\pi \text{ cm}$$

(۴): ۴

بچه ها! می دونید که زنگ اول در هر مضرب ۱۸ دقیقه به صدا در می آد و زنگ دوم در هر مضرب ۲۴ دقیقه و زنگ سوم در

هر مضرب ۳۲ دقیقه به صدا در می آد:

پس در مضرب های مشترک ۱۸ و ۲۴ و ۳۲ دقیقه، هر سه زنگ همزمان به صدا در می آن.

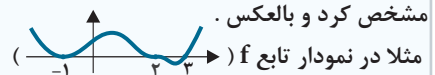
کوچکترین مضرب مشترک این سه عدد، حداقل زمانیه که باید سپری بشه تا هر سه زنگ مجدداً و به طور همزمان به صدا در بیان.

$$[18, 24, 32] = [2 \times 3^2, 2^3 \times 3, 2^5] = 2^5 \times 3^2 = 288$$

(۵): ۵

بچه ها! همونطور که در آخرین فصل گفتیم، میشه از نوع ریشه های یک تابع قیافه ی نمودار اون تابع رو در اطراف ریشه

مشخص کرد و بالعکس. $\left\{ \begin{array}{l} \text{چون قیافه ی نمودار در اطراف } x=1 \text{ سهمی شکله، } x=-1 \text{ ریشه ی مکرر زوجیه.} \\ \text{چون قیافه ی نمودار در اطراف } x=2 \text{ لُره، } x=2 \text{ ریشه ی مکرر فردیه.} \\ \text{چون نمودار در اطراف } x=3 \text{ قاطع محور } x \text{ هاست، } x=3 \text{ ریشه ی ساده هست.} \end{array} \right.$



بنابراین تابع f دارای عامل های $(x+1)^{2n}$ و $(x-2)^{2n+1}$ و $(x-3)^1$ هست. $(n \in \mathbb{N})$

از اونجایی که درجه ی تابع f برابر با ۶ پس f چاره ای نداره جز اینکه به صورت $f(x) = A(x+1)^2(x-2)^3(x-3)^1$ باشد. (چرا؟)

به همین ترتیب اگه به نمودار تابع g نگاه کنید می فهمید که: $g(x) = B(x+1)^3(x-1)^1(x-2)^1$

با توجه به ضابطه های f و g همیشه درجه ی ب.م.م و ک.م.م رو تشخیص داد.

$$g \text{ و } f \text{ ب.م.م} = \underbrace{(x+1)^2(x-2)^1}_{\text{درجه ی ۳}} \quad g \text{ و } f \text{ ک.م.م} = \underbrace{(x+1)^3(x-2)^3(x-1)^1(x-3)^1}_{\text{درجه ی ۸}}$$

۶: (۱) بچه ها! فرض کنید تعداد گردوها برابر با x . (توجه: $n, m, k \in \mathbb{N}$)

وقتی x تا گردو رو چهار تا چهار تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه، معنیش اینه که: $x = 4n + 3$

وقتی x تا گردو رو پنج تا پنج تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه، یعنی: $x = 5m + 3$

در صورتی که x تا گردو رو شش تا شش تا بردارید و ۳ تا ازش باقی بمونه، معنیش اینه که: $x = 6k + 3$

با توجه به اینکه $x - 3 = 4n = 5m = 6k$ پس همیشه گفت: $x - 3$ مضرب مشترک ۴ و ۵ و ۶ هست. یعنی:

$$x - 3 = 0 \text{ یا } 6 \text{ یا } 12 \text{ یا } 18 \text{ یا } 24 \text{ یا } 30 \text{ یا } 36 \text{ یا } 42 \text{ یا } 48 \text{ یا } 54 \text{ یا } 60 \text{ یا } 66 \text{ یا } 72 \text{ یا } 78 \text{ یا } 84 \text{ یا } 90 \text{ یا } 96 \text{ یا } 102 \text{ یا } 108 \text{ یا } 114 \text{ یا } 120} \Rightarrow x = 3 \text{ یا } 9 \text{ یا } 15 \text{ یا } 21 \text{ یا } 27 \text{ یا } 33 \text{ یا } 39 \text{ یا } 45 \text{ یا } 51 \text{ یا } 57 \text{ یا } 63 \text{ یا } 69 \text{ یا } 75 \text{ یا } 81 \text{ یا } 87 \text{ یا } 93 \text{ یا } 99 \text{ یا } 105 \text{ یا } 111 \text{ یا } 117 \text{ یا } 123}$$

از اونجایی که تعداد گردوهای درون کیسه بین ۱۵۰ تا ۲۰۰ هست، پس $x = ۱۸۳$ قابل قبوله.

۷: (۲) از اونجایی که معادله ی $x^2 + bx + c = 0$ یک ریشه ی مضاعف داره پس: $(b^2 - 4c = 0)$

اما ما می خواهیم وضعیت ریشه های معادله ی $x^2 + bx + c - 3 = 0$ رو مشخص کنیم. پس اول میریم سراغ Δ ی این معادله:

$$\Delta = b^2 - 4(c - 3) \Rightarrow \Delta = b^2 - 4c + 12 \Rightarrow \Delta = 12$$

با توجه به اینکه $\Delta > 0$ شد، پس این معادله دو ریشه ی حقیقی و متمایز داره. حالاً می خواهیم ببینیم ریشه های این معادله (یعنی $x = \frac{-b \pm \sqrt{12}}{2}$) گویا

هستن یا گنگ. در فرض مسئله گفته شده که b گویاست، از طرفی $\sqrt{12}$ گنگه پس $x = \frac{-b \pm \sqrt{12}}{2}$ گنگ میشه.

$$7x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Delta = 9 + 28 = 37 \quad (\alpha < \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-2 - \sqrt{37}}{14} & \sqrt{37} \approx 6/1 \rightarrow \alpha \approx \frac{-9/1}{14} \\ \beta = \frac{-2 + \sqrt{37}}{14} & \sqrt{37} \approx 6/1 \rightarrow \beta \approx \frac{3/1}{14} \end{cases}$$

همونطور که می بینید هر دو ریشه بین -۱ و ۱ قرار دارن. یعنی: $-1 < \alpha < \beta < 1$

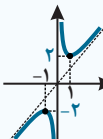
$$3(x + \frac{1}{x}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) = 2 \Rightarrow 3(x + \frac{1}{x}) + (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 2 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 + 3(x + \frac{1}{x}) - 4 = 0$$

۹: (۳)

$$x + \frac{1}{x} = A \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}} A^2 + 3A - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 1 \\ x + \frac{1}{x} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = x \\ x^2 + 1 = -4x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 & \Delta < 0 \rightarrow \text{ریشه ی حقیقی نداره} \\ x^2 + 4x + 1 = 0 & \Delta > 0 \rightarrow \text{۲ ریشه ی حقیقی داره} \end{cases}$$

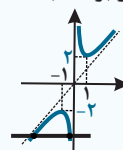
$\Rightarrow$ این معادله دو ریشه ی حقیقی و متمایز داره



روش دوم:

توجه: بچه ها! در آینده خواهید دید که نمودار تابع $y = x + \frac{1}{x}$ به صورت $x + \frac{1}{x} \geq 2$ یا $x + \frac{1}{x} \leq -2$ هست.

پس معادله ی $x + \frac{1}{x} = 1$ جواب نداره. چون هیچ نقطه ای روی منحنی $y = x + \frac{1}{x}$ پیدا نمی شه که مقدار تابع در اون نقطه برابر (۱) بشه.



اما معادله ی $x + \frac{1}{x} = -4$ دو جواب داره. چون دو نقطه روی منحنی $y = x + \frac{1}{x}$ وجود داره که مقدار تابع در اونجا برابر -۴ بشه.

(۳): ۱۰

روش اول: $x - 4\sqrt{x-2} + 1 = 0$ دامنه $= [2, +\infty)$ $\Rightarrow x - 2 - 4\sqrt{x-2} + 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x-2})^2 - 4(\sqrt{x-2}) + 3 = 0$

$\sqrt{x-2} = A \Rightarrow A^2 - 4A + 3 = 0$ مجموع ضرایب $= 0$ $\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 3 \\ A = 3 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow x = 11 \end{cases} \Rightarrow$ فاصله ی دو ریشه $= 8$

روش دوم: $x - 4\sqrt{x-2} + 1 = 0$ دامنه $= [2, +\infty)$ $\Rightarrow x + 1 = 4\sqrt{x-2}$ به توان (۲) $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 16(x-2)$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0$ $\Delta' = 49 - 33 = 16$ $x = \frac{7 \pm \sqrt{16}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$ فاصله ی دو ریشه $= 8$

(۴): ۱۱

$\begin{cases} x + y = 12 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{x \cdot y} \end{cases}$ به توان (۲) $\Rightarrow (x+y) - 2\sqrt{x \cdot y} = 4x \cdot y \Rightarrow 4(x \cdot y) + 2\sqrt{(x \cdot y)} - 12 = 0$

$\Rightarrow 4(\sqrt{x \cdot y})^2 + 2(\sqrt{x \cdot y}) - 12 = 0$ $\sqrt{x \cdot y} = A$ $\Rightarrow 4A^2 + 2A - 12 = 0 \Rightarrow (2A)^2 + (2A) - 12 = 0$

$(2A + 4)(2A - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = -2 \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \\ A = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = \frac{3}{2} \Rightarrow x \cdot y = \frac{9}{4} \end{cases}$

(۳): ۱۲

$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = x-1$ $D = [0, +\infty)$ $\Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{1}$ حذف عامل های مشترک $\Rightarrow (\sqrt{x}-1=0)$ یا $\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{1}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{x} = 1$ یا $(\sqrt{x}+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = 0$

(۲): ۱۳

بچه ها! عدد مورد نظر رو x فرض می کنیم.

مسئله گفته که: فاصله ی x از عدد ۳ برابر با نصف فاصله ی x از عدد -۱. بنابراین:

$$\frac{1}{2}|x - (-1)| = |x - 3|$$

$|x - 3| = \frac{1}{2}|x + 1|$ به توان (۲) $\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1)$ $\times 4 \Rightarrow 4x^2 - 24x + 36 = x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow 3x^2 - 26x + 35 = 0$ $\Delta' = b'^2 - 4ac = (-13)^2 - 3(35) = 64$ $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{13 \pm 8}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{3} \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

بنابراین مجموع دو مقدار بدست آمده برابر با: $\frac{26}{3}$

(۱): ۱۴ فاصله ی عرض های دو تابع برابر با ۷ یعنی اینکه قدر مطلق تفاضل دو تابع برابر با ۷:

$|(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 5x - 2)| = 7 \Rightarrow |3x + 5| = 7 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5 = 7 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ 3x + 5 = -7 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

با توجه به گزینه ها می فهمیم که در $x = -4$ فاصله ی دو تابع برابر با ۷

(۱): ۱۵

$(|x-1|-1)! = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|-1=0 \Rightarrow |x-1|=1 \Rightarrow x-1=\pm 1 \Rightarrow x=2, x=0 \\ |x-1|-1=1 \Rightarrow |x-1|=2 \Rightarrow x-1=\pm 2 \Rightarrow x=3, x=-1 \end{cases}$

(۴): ۱۶

$$\sqrt{x^2 + 2x^2 + 1} + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{12} \Rightarrow \sqrt{(x^2 + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{12} \Rightarrow \boxed{x^2 + 1} + \boxed{\sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 + (\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$$

$$\text{توجه: } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{3} + 1} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3}) + 1} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

(۱): ۱۷

$$\sqrt{3}\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{x-1} = \frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \Rightarrow (\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{x-1} = \frac{x}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{x-1} = x$$

$$\Rightarrow \sqrt{x-1} = x \Rightarrow x-1 = x^2 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد}$$

(۴): ۱۸

$$\sqrt{3x+4} = \sqrt{2x+1} + 1 \xrightarrow{\text{طرفین معادله رو به توان ۲ می‌رسونیم}} 3x+4 = (2x+1) + 2\sqrt{2x+1} + 1 \Rightarrow x+2 = 2\sqrt{2x+1}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 + 4x + 4 = 4(2x+1) \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x=0 \text{ و } x=4$$

چون هر دو مقدار بدست آمده در معادله ی اولیه صدق می کنند پس این معادله دو جواب دارد و مجموع جوابها برابر با ۴.

(۱): ۱۹

بچه ها! اگر بريد سراغ دامنه ی معادله ی $5\sqrt{1-9x^2} = 3x-2$ متوجه می شيد كه ...

$$1-9x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{9} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$3x-2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراك}} D = \emptyset$$

همونطور كه می دونيد، جواب های يك معادله، درون دامنه ی اون معادله قرار دارن. پس معادله ای كه دامنه اش تهی باشه اصلاً جواب نداره.

(۱): ۲۰

بچه ها! سمت چپ معادله ی $\sqrt[4]{x^3+x-10} + \sqrt{x^2-3x+2} = 0$ از ۲ تا عبارت بزرگتر یا مساوی صفر تشكيل شده كه

جمعشون برابر صفره. این تساوی امکان ندارد مگه اینکه x یا x هایی پیدا بشن كه هر دو عبارت رو همزمان صفر كنن. یعنی:

$$\begin{cases} x^3 + x - 10 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$x = 1$ نمی تونه $x^3 + x - 10$ رو صفر كنه اما $x = 2$ باعث صفر شدن $x^3 + x - 10$ میشه. پس $x = 2$ تنها عددیه كه تو معادله صدق می كنه. یعنی معادله يك جواب داره.

(۱): ۲۱

بچه ها! برای حل معادله ی $\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5} = \frac{11}{4}$ می خوام از روش برد استفاده كنم و برد سمت چپ معادله (یعنی ①) رو بدست بیارم.

همونطور كه می دونيد توابع $y = \sqrt{x-3}$ و $y = 2\sqrt{x+5}$ اکیداً صعودی هستن. پس جمع دو تابع (یعنی $y = \sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5}$) هم اکیداً صعودیه. کاملاً واضحه كه برای پیدا كردن برد يك تابع اكیداً یكنوا باید ابتدا و انتهای دامنه ی تابع رو درون ضابطه ی تابع قرار بدیم تا ابتدا و انتهای برد بدست بیاد. بنابراین:

$$y = \sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5} \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} x-3 \geq 0 & x \geq 3 \\ x+5 \geq 0 & x \geq -5 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراك}} D = [3, +\infty)$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 2\sqrt{8} \\ x = +\infty \Rightarrow y = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{برد ①} = \left[\frac{5}{6}, +\infty \right)$$

همونطور كه دیديد، برد سمت چپ معادله ی $\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x+5} = \frac{11}{4}$ از $\frac{5}{6}$ به بالا ست، در صورتی كه مقدار سمت راست معادله برابر با

$\frac{5}{5}$ و این امکان ندارد. پس معادله ی بالا جواب نداره.

(۲): ۲۲

$$\frac{4^x + 1}{2 - 4^x} = 2^x \Rightarrow \frac{4^x + 1}{2^x} = 2 - x^4 \xrightarrow{\text{بازنویسی}} 2^x + \frac{1}{2^x} = 2 - x^4$$

اگر به سمت چپ این معادله ی بازنویسی شده خوب دقت کنید می بینید که همواره 2^x مثبت و هر عدد مثبت علاوه ی معکوشش، بزرگتر یا

مساوی ۲ می شه. پس: $2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$ ①

از طرفی در سمت راست معادله داریم $-x^4 \leq 0$ در نتیجه: $-x^4 + 2 \leq 2$ ②

با توجه به ① و ② می فهمیم که تساوی بین طرفین معادله ممکن نیست مگر اینکه هر دو طرف همزمان مساوی ۲ بشن. یعنی:

$$\begin{cases} 2^x + \frac{1}{2^x} = 2 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ -x^4 + 2 = 2 \Rightarrow -x^4 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 0$$

پس این معادله فقط یک ریشه داره.

(۱): ۲۳

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| - \sqrt{x^2 - x + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} - \sqrt{x^2 - x + 2} = x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} \quad ①$$

کاملاً مشخصه که: $\left(\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} < \sqrt{x^2 - x + 2} \right)$ پس سمت چپ معادله ی ① منفیه، از طرفی سمت راست معادله ی ① مثبت و این

غیرممکنه. بنابراین معادله ی ① جواب نداره.

(۲): ۲۴

$$x^2 + 2|x| + \sqrt{|x| - 3} = 15 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = ?$$

در معادله ی بالا با توجه به اینکه $|x| - 3 \geq 0$ درون رادیکال قرار داره، پس: $|x| - 3 \geq 0$ و در نتیجه: $|x| \geq 3$

حالا که فهمیدیم $|x| \geq 3$ ، ببینیم سمت چپ معادله ی بالا در چه محدوده ای قرار داره:

$$\begin{aligned} |x| \geq 3 & \begin{cases} \rightarrow |x|^2 \geq 9 \\ \rightarrow 2|x| \geq 6 \\ \rightarrow \sqrt{|x| - 3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2|x| + \sqrt{|x| - 3} \geq 15 \end{aligned}$$

سمت چپ

بچه ها! همونطور که می بینید سمت چپ معادله ی $x^2 + 2|x| + \sqrt{|x| - 3} = 15$ بزرگتر یا مساوی ۱۵ هست.

در صورتی که سمت راست معادله برابر با ۱۵، پس این معادله فقط در صورتی جواب داره که سمت چپ هم با ۱۵ برابر بشه و این امکان پذیر

نیست مگر اینکه $|x| = 3$ بشه. پس این معادله دو جواب داره: $x = \pm 3$

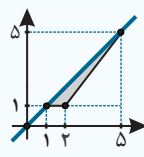
(۳): ۲۵

باتوجه به صورت مسئله، دو نقطه ی A، B روی خط $y = x$ قرار دارن، پس مختصاتشون رو بصورت (x, x) می نویسیم.

از طرفی گفته شده که فاصله ی نقطه ی (x, x) از نقطه ی $(2, 1)$ برابره با طول نقطه (یعنی x). پس کافیه که فاصله ی نقاط (x, x) و $(2, 1)$

رو بدست بیاریم و برابر x قرار بدیم تا از حل این معادله مقدار x بدست بیاد:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (x-1)^2} = x \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 2x + 1) = x^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



پس مختصات نقاط A، B به صورت $A(1,1)$ و $B(5,5)$ می شه. حالا بریم سراغ مساحت مثلث ABW:

$$S_{\Delta ABW} = \frac{BW \times BH}{2} = \frac{1 \times 4}{2} = 2$$

(۳): ۲۶

$$\frac{2}{x-2} + \frac{k}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{2(x+1) + k(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{2x+2+kx-2k}{(x-2)(x+1)} = 0 \Rightarrow \frac{x(2+k)-2k+2}{(x-2)(x+1)} = 0$$

$$x(2+k)-2k+2=0 \Rightarrow x(2+k)=2k-2 \Rightarrow x = \frac{2k-2}{2+k}, k \neq 0, -2$$

بچه ها! آیا میدونید اگر $k=0$ بشه، چی می شه؟

(۲۷): (۲) روش اول:

$$\frac{8x-15}{x^2-3x} + \frac{3}{3-x} = \frac{A}{x} \Rightarrow \frac{8x-15}{x^2-3x} - \frac{3}{x-3} = \frac{A}{x} \xrightarrow{\text{کل تساوی رو در مخرج مشترک ضرب میکنیم}} 8x-15-3x = A(x-3)$$

$$\Rightarrow 5x-15 = A(x-3) \Rightarrow 5(x-3) = A(x-3) \Rightarrow A=5$$

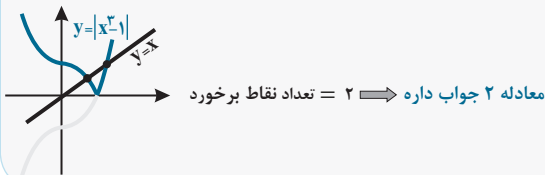
روش دوم: بچه ها! از اونجایی که این معادله یک اتحاد پس به ازای تمام x های دامنه برقراره. در نتیجه کافیه یک x از دامنه انتخاب کنیم و درون این اتحاد بندازیم تا A پیدا بشه یعنی:

$$\frac{8x-15}{x^2-3x} + \frac{3}{3-x} = \frac{A}{x} \xrightarrow{x=1} \frac{8-15}{1-3} + \frac{3}{3-1} = \frac{A}{1} \Rightarrow \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = A \Rightarrow A=5$$

(۲۸): (۳)

$$|x^3-1|-x=0 \Rightarrow |x^3-1|=x$$

برای رسم نمودار $y = |x^3-1|$ اول نمودار $y = x^3$ رو رسم می کنیم و بعد یک واحد به پایین انتقال می دیم. در نهایت از نمودار انتقال یافته قدر مطلق می گیریم.



(۲۹): (۴)

می خوایم ببینیم در بین چهار معادله ی (الف) $\sqrt{x}-x=1$ (ب) $\sqrt{x}-x=3$ (ج) $\sqrt{x-1}=x-3$ (د) $\sqrt{x}+\cos x=0$ چند تا نشون جواب دارن:

$\sqrt{x}=x+1$ $\xrightarrow{\text{روش هندسی}}$ $\Rightarrow$ معادله یک جواب داره $\Rightarrow$ دو تابع در یک نقطه برخورد دارن

$\sqrt{x-1}=x-3$ $\xrightarrow{\text{روش هندسی}}$ $\Rightarrow$ معادله یک جواب داره $\Rightarrow$ دو تابع در یک نقطه برخورد دارن

$x^2=2^x$ $\xrightarrow{\text{روش هندسی}}$ $\Rightarrow$ معادله سه جواب داره $\Rightarrow$ دو تابع در سه نقطه برخورد دارن

$\cos x = -\sqrt{x}$ $\xrightarrow{\text{روش هندسی}}$ $\Rightarrow$ معادله جواب نداره $\Rightarrow$ دو تابع، برخوردی باهم ندارن

همونطور که در قسمت ج دیدید، در محدوده $x > 0$ ابتدا رشد نمودار تابع $y = x^2$ بیشتره و سپس رشد نمودار تابع $y = 2^x$ بیشتر میشه. به همین دلیل که این دو نمودار یک بار همدیگه رو در $x=2$ و بار دیگه در $x=4$ قطع می کنن.

(۳۰): (۲)

(۱) بررسی گزینه ی (۱): $||x|-1|=5 \Rightarrow |x|-1=\pm 5 \Rightarrow \begin{cases} |x|=6 \Rightarrow x=\pm 6 \\ |x|=-4 \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow$ دو ریشه

(۲) بررسی گزینه ی (۲): $|x^2-2|=2 \Rightarrow x^2-2=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \\ x^2=0 \Rightarrow x=0 \end{cases} \Rightarrow$ سه ریشه

(۳) بررسی گزینه ی (۳): $x|x|=-4 \xrightarrow{\text{روش هندسی}}$ $\Rightarrow$ یک ریشه $\Rightarrow$ یک برخورد

(۴) بررسی گزینه ی (۴): $|2x-1|+|x|=7$

بچه ها! در فصل قدر مطلق، حل این نوع معادلات رو با روش سریعتر خواهید دید. اما بریم سراغ روش مفهومی: دوستان من! آیا قبول دارید که اگه این دیوارهای قدر مطلق نبودن خیلی راحت می تونستیم معادله رو حل کنیم؟ به همین منظور باب مذاکره رو با قدر مطلق باز می کنیم:

منتظری: جناب قدر مطلق خواهش می کنم عبارت های درونت رو مثبت کن و بفرستشون بیرون تا من بتونم معادله رو حل کنم.

قدر مطلق: آخه آقای منتظری، عبارت های درون من حالشون خوش نیست. بعضی جاها مثبتن، بعضی جاها منفی.

پس شما یه زحمتی بکش و $(2x-1)$ و (x) رو تعیین علامت کن تا من بفهمم که چه برخوردی باهاشون داشته باشم.

x	0	$\frac{1}{2}$
$2x-1$	-	+
x	-	+

منتظری: باشه جناب قدر مطلق بفرما:

$$|2x-1| + |x| = 7$$

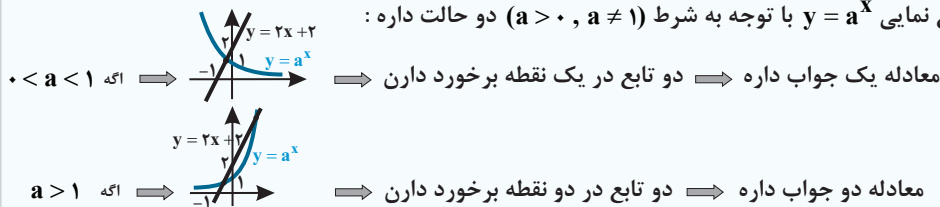
قدر مطلق:

$$\begin{aligned} x < 0 & \Rightarrow -(2x-1) - (x) = 7 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \\ 0 \leq x < \frac{1}{2} & \Rightarrow -(2x-1) + (x) = 7 \Rightarrow -x = 6 \Rightarrow x = -6 \quad (\text{چرا؟}) \\ x > \frac{1}{2} & \Rightarrow (2x-1) + (x) = 7 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(۴): ۳۱

برای پیدا کردن تعداد ریشه های معادله $2x+2=a^x$ با شرط $(a>0, a \neq 1)$ از روش هندسی استفاده می کنیم.

یعنی نمودارهای دو تابع $y=a^x$ و $y=2x+2$ رو در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم تا ببینیم در چند نقطه با هم برخورد دارن. اما بچه ها! حواستون باشه که نمودار تابع نمایی $y=a^x$ با توجه به شرط $(a>0, a \neq 1)$ دو حالت داره:



پس این معادله حداقل یک ریشه داره.

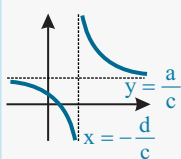
(۳): ۳۲

بچه ها! در فصل آخر این کتاب با نمودار تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با شرط $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ و $c \neq 0$ آشنا می شید که اسمش هست تابع

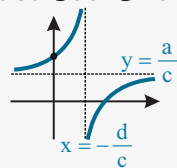
هموگرافیک. اما به دلیل اهمیت زیاد این تابع، مجبورم روش سریع رسم نمودارش رو براتون توضیح بدم. پس خوب دقت کنید:

خط افقی $y = \frac{a}{c}$ و خط عمودی $x = -\frac{d}{c}$ نقش اساسی رو توی رسم تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ بازی می کنن که به این دو خط،

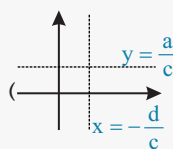
مجانِب های افقی و قائم تابع هموگرافیک می گیم. (از تقسیم ضرایب x به هم ایجاد میشه و $-\frac{d}{c}$ ریشه ی مخرج)



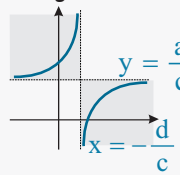
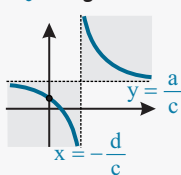
نمودار این تابع از دو حالت خارج نیست. ممکنه نمودار تابع در ربع اول و سوم مجانب هاش قرار بگیره



و ممکنه در ربع دوم یا چهارم مجانب ها رسم بشه.



روش رسم: پس برای رسم تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ دو حرکت لازمه: (۱) خطوط $y = \frac{a}{c}$ و $x = -\frac{d}{c}$ رو رسم کنید. (۲) شکل ۲

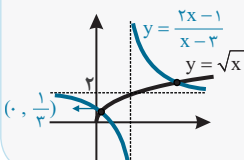


و یک نقطه ی دلخواه از تابع (ترجیحاً نقطه ای به طول صفر) رو مشخص کنید.

(۳) اگه این نقطه در ربع اول یا سوم مجانب ها بود، نمودار تابع رو در ربع اول و سوم مجانبها رسم کنید.

(۴) اگه نقطه ی بدست اومده در ربع دوم یا چهارم مجانب ها بود، نمودار تابع رو در ربع دوم و چهارم مجانب ها رسم کنید.

حالا اگه موافق باشید بریم سراغ حل این تست:



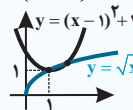
برای اینکه بفهمیم معادله $\frac{2x-1}{x-3} = \sqrt{x}$ چند جواب داره کافیه نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = \frac{2x-1}{x-3}$ رو در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. تعداد نقاط برخورد این دو تابع، همون تعداد جواب های معادله هست:

از اونجایی که این دو تابع در دو نقطه با هم برخورد دارن پس این معادله دو جواب داره.

(۲): ۳۳

$$(۱) \text{ گزینه ی } \frac{2x-1}{x-1} = 5 - x \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5x - x^2 - 5 + x = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف } x = 2$$

$$(۲) \text{ گزینه ی } \sqrt{x} + 2x = x^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow \sqrt{x} = (x-1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{روش هندسی}}$$



چون دو تابع در دو نقطه ی متفاوت برخورد دارند پس این معادله دو ریشه ی متمایز دارد.

$$(۳) \text{ گزینه ی } 2x - \sin x = 0 \xrightarrow{\text{روش هندسی}} \text{یک ریشه} \Rightarrow \text{یک برخورد}$$



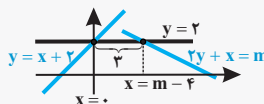
$$(۴) \text{ گزینه ی } x^3 - \cos x = 0 \Rightarrow x^3 = \cos x \xrightarrow{\text{روش هندسی}} \text{یک ریشه} \Rightarrow \text{یک برخورد}$$



(۳): ۳۴ بچه ها! سوال گفته که خط $y = 2$ با خطوط $y = x + 2$ و $2y + x = m$ در دو نقطه برخورد دارد و فاصله ی این دو نقطه برابره با ۳. بنابراین:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{برخورد}} x + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \text{طول نقطه ی برخورد}$$

$$\begin{cases} 2y + x = m \\ y = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{برخورد}} 2(2) + x = m \Rightarrow \boxed{x = m - 4} \quad \text{طول نقطه ی برخورد}$$



همانطور که می دونید فاصله ی دو نقطه ی a, b که روی محور x ها قرار دارند برابره با $|a - b|$ از طرفی گفته شده که فاصله ی $m - 4$ تا صفر برابره با ۳

$$\text{بنابراین: } |(m-4) - 0| = 3 \Rightarrow m - 4 = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = 1 \end{cases}$$

(۳): ۳۵

$$2x + \boxed{2x + 2x + \dots} = 1 \Rightarrow 2^{x+1} = 1 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

(۱): ۳۶

$$(a+b)^{13} = \binom{13}{0}a^{13}b^0 + \binom{13}{1}a^{12}b^1 + \binom{13}{2}a^{11}b^2 + \binom{13}{3}a^{10}b^3 + \dots$$

$$(a-b)^{13} = \binom{13}{0}a^{13}b^0 - \binom{13}{1}a^{12}b^1 + \binom{13}{2}a^{11}b^2 - \binom{13}{3}a^{10}b^3 + \dots$$

توان بسط های بالا ۱۳ هست، پس تعداد جملات هر بسط ۱۴ میشه که اگه جملات این دو بسط رو به صورت ستونی با هم جمع کنیم می بینیم که جملات دوم، چهارم و... چهاردهم حذف می شن. پس هفت جمله باقی میمونه.

(۲): ۳۷

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k : \text{میدونیم جمله ی } (k+1) \text{ ام بسط } (a+b)^n \text{ برابره با:}$$

$$\binom{n}{2} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^n \text{ برابره با: } \binom{n}{2} 2^{n-2} \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

ضریب جمله ی سوم

ازطرفی گفته شده که ضریب جمله ی سوم این بسط، برابره با ۲۴۰. پس:

$$\binom{n}{2} \times 2^{n-2} = 240 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} \times 2^{n-2} = 240 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} \times 2^{n-2} = 240 \xrightarrow{\text{رو تجزیه کنید}}$$

$$n(n-1) \times 2^{n-3} = 6 \times 5 \times 2^3 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow \text{دارای ۷ جمله هست } \left(2 + \frac{1}{x}\right)^6$$

(۴): ۳۸ جمله ی $(k+1)$ ام بسط $(3x^2 + \frac{1}{x})^{15}$ برابر با: $(\frac{15}{k})(3x^2)^{15-k}(\frac{1}{x})^k$

برای اینکه جمله ی مذکور مستقل از x (یعنی فاقد x) باشد، باید x های صورت و مخرج، هم توان باشند تا بتوان با هم ساده بشن. یعنی:

مستقل از x

$$\left(\frac{15}{k}\right) \times 3^{15-k} \times x^{2(15-k)} \times \frac{1}{x^k} \Rightarrow 2(15-k) = k \Rightarrow 30 - 2k = k \Rightarrow 3k = 30 \Rightarrow k = 10$$

از اونجایی که $k = 10$ بدست اومد پس جمله ی $(k+1)$ ام (یعنی جمله ی یازدهم) فاقد x هست.

(۳): ۳۹ در بسط دو جمله ای $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b})^{21}$ جمله ی $k+1$ ام یا همون جمله ی عمومی برابر با: $\left(\frac{21}{k}\right)(\sqrt[3]{a})^{21-k}(\sqrt[5]{b})^k$

رادیكال های این جمله زمانی از بین میرن که همزمان k مضرب ۵ و $(21-k)$ مضرب ۳ باشد. بنابراین:

مضرب ۵:	k	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰
مضرب ۳:	$21-k$	۲۱	۱۶	۱۱	۶	۱

همونطور که معلومه فقط دو جمله ی این بسط فاقد رادیكال هست.

(۴): ۴۰ $(a+b)^1$: ① ①

$(a+b)^2$: ۱ ② ۱

$(a+b)^3$: ۱ ③ ③ ۱

$(a+b)^4$: ۱ ۴ ⑥ ۴ ۱

⋮

همونطور که معلومه در بسط $(a+b)^n$:

اگر n فرد باشد اون موقع دو جمله ی وسط، یعنی جمله ی شماره $(\frac{n}{2} + \frac{1}{2})$ و جمله ی بعدیش، یعنی $(\frac{n}{2} + \frac{3}{2})$ بزرگترین ضریب رو دارن.

اما اگر n زوج باشد اون موقع جمله ی وسط، یعنی جمله ی شماره $(\frac{n}{2} + 1)$ بزرگترین ضریب رو داره.

از اونجایی که در سوال گفته شده، جمله ی نهم بسط $(a+b)^n$ ، بزرگترین ضریب رو داره، میشه گفت:

فرد n شرط: $\frac{n}{2} + \frac{3}{2} = 9 \rightarrow \frac{n}{2} = \frac{15}{2} \rightarrow n = 15$

فرد n شرط: $\frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 9 \rightarrow \frac{n}{2} = \frac{17}{2} \rightarrow n = 17$

زوج n شرط: $\frac{n}{2} + 1 = 9 \rightarrow \frac{n}{2} = 8 \rightarrow n = 16$

پس جواب سوال اینطوری مطرح بشه: در بسط $(a+b)^n$ فقط جمله ی نهم بزرگترین ضریب را دارد. n کدام است؟ اون موقع $n=15$ ، $n=17$ قابل قبول نیستن. چرا؟

(۲): ۴۱
$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^{2n+2} = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^{n+1} \begin{cases} \xrightarrow{a=b=1} \text{مجموع ضرایب بسط} = 2^{n+1} \\ \xrightarrow{\text{با توجه به سوال}} \text{مجموع ضرایب بسط} = 2048 \end{cases} \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{11}$$

حالا که $n = 10$ شد، این مقدار رو درون $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^{n+1}$ قرار میدیم. بنابراین بسط $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^{11}$ ، دوازده جمله داره.

توجه: اگر k و k' دو عدد حقیقی بوده و بخوایم ضرایب بسط $(ka + k'b)^n$ رو بدست بیاریم کافیه بجای پارامترهای a و b مقدار ۱ رو قرار

بدیم. یعنی:

$$(ka + k'b)^n = (k + k')^n \xrightarrow{\text{مثال}} \begin{cases} (a+b)^n = \text{مجموع ضرایب بسط} = 2^n \\ (\sqrt[3]{a} + b)^n = \text{مجموع ضرایب بسط} = 3^n \end{cases}$$

(۲): ۴۲ $(\tan x - \cot x)^6 = \tan^6 x - 6 \tan^3 x \cdot \cot x + 6 \tan^2 x \cdot \cot^2 x - 6 \tan x \cdot \cot^3 x + \cot^6 x$

جمله دوم $\times$ جمله چهارم = ۶۱
جمله ی مستقل از x = ۶
تفاضل $\rightarrow$ ۰۱

۴۳: (۳) طبق گفته ی مسئله : ۱۵ کیلوگرم آلیاژ نیکل و کُرُم داریم که ۸۰ درصدش نیکل و ۲۰ درصدش کُرُمه . یعنی :

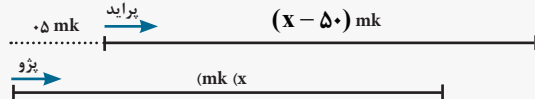
$$\frac{20}{100} \times 15 = 3 \Rightarrow \text{(درون آلیاژ، ۳ کیلوگرم کُرُم و ۱۲ کیلوگرم نیکل وجود دارد)}$$

حالا باید x کیلوگرم کُرُم به آلیاژ اضافه کنیم تا درصدش به ۴۰ درصد برسه (یعنی درصد نیکل بشه ۶۰)

پس با اضافه کردن x کیلوگرم کُرُم ، وزن کُرُم به $(3+x)$ کیلوگرم و وزن کل آلیاژ به $15+x$ کیلوگرم میرسه . از اونجایی که درصد کُرُم باید به

$$40 \text{ درصد برسه ، پس : } \frac{x+3}{x+15} = \frac{40}{100} \Rightarrow \frac{x+3}{x+15} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x+15 = 2x+30 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

۴۴: (۳) فاصله ی تهران تا اصفهان رو x کیلومتر فرض می کنیم . می دونیم راننده ی پژو زمانی حرکت کرد که راننده ی پراید ۵۰



کیلومتر رو طی کرده بود .

از طرفی در سوال گفته شده که : مدت رانندگی توسط پژو (برای مسافت x کیلومتر) یک ساعت کمتره از مدت رانندگی توسط پراید (برای مسافت $x-50$ کیلومتر) . بنابراین :

$$1 = \text{مدت رانندگی توسط پژو برای طی } x \text{ کیلومتر} - \text{مدت رانندگی توسط پراید برای طی } (x-50) \text{ کیلومتر}$$

پراید :

ساعت	کیلومتر
۱	۸۰
?	$x-50$

$$\Rightarrow ? = \frac{x-50}{80}$$

پژو :

ساعت	کیلومتر
۱	۱۲۰
?	x

$$\Rightarrow ? = \frac{x}{120}$$

$$\frac{x-50}{80} - \frac{x}{120} = 1 \Rightarrow \frac{3(x-50) - 2(x)}{240} = 1 \Rightarrow x-150 = 240 \Rightarrow \boxed{x=390}$$

فاصله ی تهران تا اصفهان

۴۵: (۲) همونطور که سوال گفته ، یک ظرف داریم که ۴۹ لیتر آب توشه . ابتدا x لیتر از آب رو بر می داریم و بجاش متانول

می ریزیم . بنابراین از محلول ۴۹ لیتری آب و متانول ، سهم آب $(49-x)$ لیتره .

حالا از محلول ۴۹ لیتری آب و متانول ، x لیترش رو بر می داریم تا مقدار محلول بشه $49-x$ لیتر.

اما سوال اینه که $\left. \begin{array}{l} \text{وقتی در ۴۹ لیتر محلول ، به مقدار } (49-x) \text{ لیتر آب وجود داره ،} \\ \text{در } (49-x) \text{ لیتر محلول ، چند لیتر آب وجود داره ؟} \end{array} \right\}$

محلول	آب
۴۹ lit	$(49-x) \text{ lit}$
$(49-x) \text{ lit}$	?

$$\Rightarrow ? = \frac{(49-x)^2}{49}$$

از اونجایی که در صورت سوال گفته شده که ۳۶ لیتر آب در محلول باقی می مونه پس :

$$\frac{(49-x)^2}{49} = 36 \Rightarrow (49-x)^2 = 6^2 \times 7^2 \Rightarrow 49-x = \pm 42 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=91 \end{cases} \quad \text{(چرا؟)}$$

اگه دقت کنید می بینید که $x=7$ همون مقدار آبیّه که در ابتدا برداشتیم .

۴۶: (۴) $\left. \begin{array}{l} \text{برای } x \text{ کیلوگرم لوبیا ۱۲۰ تومان پول داد. پس برای ۱ کیلوگرم لوبیا } \frac{120}{x} \text{ تومان پول داده .} \\ \text{برای } x+2 \text{ کیلوگرم عدس ۱۵۰ تومان داد پس برای ۱ کیلوگرم عدس } \frac{150}{x+2} \text{ تومان پول داده .} \end{array} \right\}$ زهرا

با توجه به اینکه قیمت ۱ کیلوگرم لوبیا ۵ تومان بیشتر از قیمت ۱ کیلوگرم عدسه ، پس :

$$\frac{120}{x} - \frac{150}{x+2} = 5 \Rightarrow \frac{120(x+2) - 150x}{x(x+2)} = 5 \Rightarrow \frac{-30x + 240}{x^2 + 2x} = 5$$

$$5x^2 + 10x = -30x + 240 \Rightarrow 5x^2 + 40x - 240 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ x = 4 \end{cases}$$

(+۱۲) (-۴)

وزن لوبیا ۴ کیلو و وزن عدس ۶ کیلو بوده ، پس وزن مجموعشون برابر ۱۰ کیلوگرمه .

۴۷: (۲) اگر سرعت پراید رو x کیلومتر در ساعت فرض کنیم، سرعت پژو همیشه $(x+10)$ کیلومتر در ساعت. حالا می‌خوایم ببینیم هر کدام از این دو راننده، مسافت ۱۰۰ کیلومتری رو در چه زمانی طی کرده‌اند:

برای پراید: $\frac{x}{100} \times 1 = ?$ ساعت مسافت پراید $\Rightarrow ? = \frac{100}{x}$

پژو: $\frac{x+10}{100} \times 1 = ?$ ساعت مسافت پژو $\Rightarrow ? = \frac{100}{x+10}$

مدت مسافت پژو - مدت مسافت پراید = $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{100}{x} - \frac{100}{x+10} = \frac{1}{2}$

$$\frac{100}{x(x+10)} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + 10x = 2000 \Rightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0 \Rightarrow (x-40)(x+50) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = -50 \end{cases}$$

$(-40) \cdot (+50)$

باتوجه به اینکه سرعت پراید ۴۰ کیلومتر در ساعته، پس سرعت پژو همیشه $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

۴۸: (۲) قسمت اول سوال گفته که: آقا عماد ۱۲۰۰۰ تومان داد و n تا اسباب بازی خرید که قیمت هر کدام x تومان بود.

پس: $nx = 12000$ (قیمت هر کالا $\times$ تعداد کالا)
دومین قسمت سوال می‌گه که: با ۱۲۰۰۰ تومان پولی که آقا عماد پرداخت کرد، اگر ۱۰۰ تومان برای هر اسباب بازی تخفیف می‌گرفت (یعنی قیمت هر اسباب بازی $x-100$ تومان بود) می‌تونست ۴ تا اسباب بازی بیشتر بخره (یعنی $n+4$ تا اسباب بازی می‌خرید) پس همیشه گفت: $(n+4)(x-100) = 12000$

$$\begin{aligned} nx = 12000 &\Rightarrow x = \frac{12000}{n} \\ (n+4)(x-100) = 12000 &\Rightarrow (n+4)\left(\frac{12000}{n} - 100\right) = 12000 \Rightarrow 12000 - 100n + \frac{48000}{n} - 400 = 12000 \\ \Rightarrow -100n^2 + 48000 - 400n = 0 &\Rightarrow n^2 + 4n - 480 = 0 \Rightarrow (n+24)(n-120) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -24 \\ n = 120 \end{cases} \\ 480 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 &\Rightarrow (+240) \cdot (-120) \end{aligned}$$

آقا عماد قبل از تخفیف می‌تونست ۲۰ اسباب بازی بخره و با توجه به رابطه ی $(nx = 12000)$ قیمت هر اسباب بازی ۶۰۰ تومان بود.

۴۹: (۳) اگر بانک در هر سال x درصد به پول حامد سود بده، بعد از گذشت یکسال ۱۰۰۰ تومان سپرده ی حامد برابر می‌شه با:

$$1000 + \frac{x}{100}(1000) = 1000 + 10x$$

سوال داره می‌گه: که حامد بعد از گذشت یکسال ۵۰۰۰ تومان از پولش رو بر می‌داره. پس بعد از یک سال پول حامد برابره با:

$$(1000 + 10x) - 500 = 500 + 10x$$

اما اگر یک سال دیگه از این زمان بگذره (یعنی در سال دوم) x درصد به مقدار $(500 + 10x)$ اضافه میشه و پول حامد برابر میشه با ۸۴۰۰ تومان. به عبارت دیگه:

$$\begin{aligned} \text{مقدار سود، در مدت یکسال} &\Rightarrow (500 + 10x) + \frac{x}{100}(500 + 10x) = 8400 \Rightarrow 500 + 10x + 5x + x^2 = 8400 \Rightarrow x^2 + 15x - 3400 = 0 \\ \Rightarrow (x-20)(x+170) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -170 \end{cases} \Rightarrow \text{سود بانک در یک سال برابره با } 20\% \text{ در صد} \end{aligned}$$

۵۰: (۲) بچه‌ها! سوال می‌گه دو عدد داریم که یکی از اون یکی ۱۰ واحد کوچکتره پس کوچیکه رو بگیریم x ، در نتیجه بزرگه

میشه $(x+10)$. از طرفی گفته شده که این دو عدد در هم ضرب شدند و اشتباهی رقم دهگان ۴ واحد از مقدار واقعی اش کمتر شد. این یعنی حاصلضرب دو عدد به طور اشتباهی شده: $x(x+10) - 40$ اما در ادامه گفته شده که اگر همین مقدار اشتباه رو به عدد کوچیکتر (یعنی x) تقسیم کنید، خارج قسمت می‌شه ۳۹ و باقیمانده می‌شه ۲۲. به عبارت دیگه:

$$\begin{aligned} \frac{x(x+10) - 40}{22} &\left| \frac{x}{39} \Rightarrow x(x+10) - 40 = 39x + 22 \Rightarrow x^2 + 10x - 40 = 39x + 22 \Rightarrow x^2 - 29x - 62 = 0 \right. \\ &\Rightarrow (x+2)(x-31) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 31 \end{cases} \end{aligned}$$

$(+2) \cdot (-31)$

(چرا؟) $x = 31$ (عدد کوچکتر)

آزمون فصل (۱)

- ۱ معادله ی $x\sqrt{1-x} = \sqrt{x}(1-x)$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 اگر روی محور افق فاصله $4a$ تا عدد ۳ با فاصله $3a$ تا عدد ۴ برابر باشد فاصله a تا مبدا چه قدر است؟
 (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{3}{2}$
 دکتر سازگار (سر گروه مازندران)
- ۲ برای هر $x \in (-1, 0)$ مقدار $\sqrt{9x^2 + 24x + 16} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ کدام است؟
 (۱) $5x + 3$ (۲) $x - 4$ (۳) $-x + 4$ (۴) $5x + 5$
 استاد غفار پور (سر گروه اصفهان)
- ۳ جواب های معادله ی $\frac{1}{x^3 + x^2} = \frac{2}{x + 1}$ عبارتند از:
 (۱) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\pm \sqrt{2}$ (۳) $1, -\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$
 آزاد - ۶۷
- ۴ معادله ی $x(x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟
 (۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار
 دکتر ثنائی (سر گروه گلستان)
- ۵ معادله ی $4\sqrt{x^2-x} + 2\sqrt{x^2-x} = 2$ چند ریشه ی حقیقی دارد؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
 استاد جوادى (عضو گروه ریاضی آذربایجان غربی)
- ۶ معادله ی $|x| = \frac{x}{x-1}$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 متن کتاب
- ۷ معادله ی $-x^2 - 1 + \cos x = 0$ چند جواب دارد؟
 (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳
 متن کتاب
- ۸ عددی مثبت وجود دارد که اگر یک سوم آنرا با ۱ و همچنین یک چهارم آنرا با ۱ جمع کنیم و دو مقدار بدست آمده را در هم ضرب کنیم حاصل برابر ۲۰ می شود. آن عدد کدام است؟
 (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۲۶ (۴) ۳۴
 متن کتاب
- ۹ از دبیر ریاضی یک مدرسه سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال داشته است؟
 (۱) ۲۵ (۲) ۲۸ (۳) ۳۰ (۴) ۳۲
 متن کتاب
- ۱۰ اگر ۲ یکی از جواب های معادله ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ باشد، مجموع جواب های این معادله کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵
 متن کتاب
- ۱۱ اگر چند جمله ای $x^4 - 3x^3 + mx + n$ بر $x^2 - 5x + 6 = 0$ بخش پذیر باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟
 (۱) -۸ (۲) ۲۴ (۳) -۱۲ (۴) ۱۶
 متن کتاب

آزمون فصل (۱)

استاد فخر لویی (سر گروه آذربایجان غربی)

۱۳ در بسط دو جمله ای $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{12}$ ضریب جمله ی شامل x^6 کدام است ؟

- ۶۶ (۱) ۲۲ (۲) $\frac{22}{3}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴)

استاد درایش (عضو گروه ریاضی هرمزگان)

۱۴ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $P(x) = 4x^2 - 1$ و $Q(x) = 4x^2 + 10x + 4$ کدام است ؟

- $4x^2 - 1$ (۴) 1 (۳) $2x - 1$ (۲) $2x + 1$ (۱)

امیر مسین نمیری (تهران)

۱۵ کوچکترین مضرب مشترک دو عبارت $x^3 + x^2 - x - 1$ و $x^3 - x^2 - x + 1$ کدام است ؟

- $(x^2 + 1)(x - 1)^2$ (۴) $(x^2 - 1)(x + 1)^2$ (۳) $(x^2 + 1)^2$ (۲) $(x^2 - 1)^2$ (۱)

متن کتاب

۱۶ ساده شده ی عبارت $\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$ کدام است ؟

- 1 (۴) $a^2 - a + 1$ (۳) $a^2 + a + 1$ (۲) $a - 1$ (۱)

متن کتاب

۱۷ معادله ی $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ چند جواب دارد ؟

- ۳ (۴)

۱۸ معادله ی $\frac{|x+2|}{|x-2|} = 6$ (۱)

- ۱ (۲) ۲ (۳)

- ۴ (۴)

متن کتاب با کمی تغییر

۱۹ معادله ی $|x-5| = 1 - 2x$ چند جواب حقیقی دارد ؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۳ (۴)

استاد زمانی (سر گروه آذربایجان شرقی)

۲۰ چه تعداد از روابط زیر به ازای هر n طبیعی، صحیح است ؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

$$A) x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

- ۲ (۳)

$$B) x^n - 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots - 1)$$

$$C) x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$$

- ۱ (۲) ۰ (۱)